

SUZUKI'S THEOREM ON $S(q_1, q_2, q_3)$ -METRIC SPACES ĐỊNH LÝ SUZUKI TRÊN KHÔNG GIAN $S(q_1, q_2, q_3)$ -METRIC

Nguyễn Sỹ Thắng, Ông Hoàng Anh Kiệt, Nguyễn Hoàng Thành
Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Đà Nẵng

ABSTRACT: This paper extends the Suzuki theorem, a generalization of the Banach contraction principle, to a new class of generalized metric spaces, specifically $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric spaces. The primary objective of this study is to establish the necessary conditions to affirm the unique existence of fixed points for mappings satisfying the Suzuki contraction condition on $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric spaces. The results of this paper indicate that the Suzuki theorem remains valid in generalized metric spaces, specifically in $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric spaces.

Keywords: Contraction mapping, Suzuki's theorem, S -metric spaces $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric spaces, fixed point.

TÓM TẮT: Bài báo này mở rộng định lý Suzuki, là một dạng mở rộng của nguyên lý ánh xạ co Banach, sang lớp các không gian metric suy rộng mới, cụ thể là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric. Mục tiêu chính của bài báo này là xây dựng các điều kiện cần thiết nhằm khẳng định sự tồn tại duy nhất của điểm bất động cho các ánh xạ thỏa mãn điều kiện co Suzuki trên không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric. Kết quả của bài báo này cho thấy rằng định lý Suzuki vẫn đúng trong các không gian metric suy rộng, cụ thể là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric.

Từ khóa: Ánh xạ co, định lý Suzuki, không gian S -metric, không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric, điểm bất động.

1. GIỚI THIỆU

Trong lý thuyết điểm bất động, định lý Suzuki [10] giới thiệu bởi Tomonari Suzuki được xem là một trong những kết quả tinh tế mở rộng nguyên lý ánh xạ co Banach [2], khi thay thế điều kiện co toàn cục bằng các điều kiện co suy rộng phụ thuộc vào khoảng cách giữa các điểm và ảnh của chúng. Kể từ khi được giới thiệu trong không gian metric cổ điển, định lý Suzuki đã thu hút nhiều sự quan tâm và trở thành đối tượng nghiên cứu mở rộng sang các lớp không gian metric suy rộng khác nhau. Xu hướng này xuất phát từ nhu cầu mô hình hóa các cấu trúc khoảng cách linh hoạt hơn, nơi tính đối xứng hoặc bất đẳng thức tam giác cổ điển có thể bị “nới lỏng” nhưng vẫn bảo toàn được các tính chất điểm bất động quan trọng.

Trong số các hướng mở rộng tiêu biểu, không gian giả metric và các biến thể của nó như không gian metric riêng [5], không gian G -metric [6],... đóng vai trò quan trọng. Đặc biệt, không gian b -metric được giới thiệu bởi Bakhtin [1], phát triển bởi Czerwik [3] và S -metric [9] do Sedghi và cộng sự đề xuất đã cung cấp một khuôn khổ tổng quát hóa metric thông qua hàm khoảng cách ba biến, cho phép nghiên cứu các bài toán điểm bất động trong bối cảnh phi tuyến tính hơn. Trên không gian S -metric, nhiều dạng của nguyên lý ánh xạ co và các định lý kiểu Banach đã được thiết lập, tạo tiền đề cho việc xem xét các mở rộng của định lý Suzuki. Từ đây, không gian S_b -metric [8]

đã được giới thiệu như một sự kết hợp giữa b-metric và S-metric, đã mở ra một lớp không gian mới vừa mang tính suy rộng về mặt bất đẳng thức tam giác, vừa giữ được tính linh hoạt của hàm khoảng cách ba biến.

Trong những năm gần đây, một số kết quả đã chứng minh rằng các phiên bản thích hợp của định lý Suzuki vẫn đúng trong các không gian suy rộng như b-metric [7], S-metric [4],... dưới các giả thiết điều chỉnh phù hợp. Tiếp nối hướng đi đó, trong bài báo này chúng tôi đưa ra một lớp không gian metric suy rộng mới là $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric, là tổng quát hóa của S-metric và S_b-metric, để từ đó thiết lập một kết quả mới về tính chất điểm bất động kiểu Suzuki trên lớp không gian này.

2. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Định nghĩa 2.1. [9] Cho X là một tập hợp khác rỗng. Ánh xạ $S: X^3 \rightarrow [0, +\infty)$ được gọi là S-metric nếu với mọi $x, y, z, a \in X$

$$(qi) \quad S(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z,$$

$$(qii) \quad S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a).$$

Khi đó cặp (X, S) được gọi là không gian S-metric.

Định nghĩa 2.2. [8] Cho X là một tập hợp khác rỗng và số thực $b \geq 1$. Ánh xạ $S_b: X^3 \rightarrow [0, +\infty)$ được gọi là S_b -metric nếu với mọi $x, y, z, a \in X$

$$(i) \quad S_b(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z,$$

$$(ii) \quad S_b(x, y, z) \leq b[S_b(x, x, a) + S_b(y, y, a) + S_b(z, z, a)].$$

Khi đó cặp (X, S_b) được gọi là không gian S_b -metric.

Để tính chất điểm động kiểu Suzuki có thể được phát biểu mạnh hơn trên không gian S-metric, chúng tôi đưa vào một mở rộng của S-metric và S_b -metric như sau:

Định nghĩa 2.3. Cho X là một tập hợp khác rỗng và các số thực $q_1, q_2, q_3 \geq 1$. Ánh xạ $S: X^3 \rightarrow [0, +\infty)$ được gọi là $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric nếu với mọi $x, y, z, a \in X$

$$(Si) \quad S(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z,$$

$$(Sii) \quad S(x, y, z) \leq q_1 S(x, x, a) + q_2 S(y, y, a) + q_3 S(z, z, a).$$

Khi đó bộ (X, S, q_1, q_2, q_3) được gọi là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric.

Nếu ta đặt $R(x, y) = S(x, x, y)$ thì từ (Si) suy ra $R(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, hơn nữa điều kiện (Sii) trở thành

$$(Sii') \quad S(x, y, z) \leq q_1 R(x, a) + q_2 R(y, a) + q_3 R(z, a).$$

Ví dụ 2.4. Cho (X, d) là không gian metric. Khi đó, ánh xạ $S: X^3 \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi $S(x, y, z) := d(x, y) + d(y, z)$ là một $S(1, 2, 1)$ -metric.

Thật vậy, dễ dàng kiểm tra được S thỏa mãn điều kiện (Si). Ta chỉ cần chỉ ra S thỏa (Sii), với mọi $x, y, z, a \in X$ ta có

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &= d(x, y) + d(y, z) \\ &\leq d(x, a) + 2d(y, a) + d(z, a) \\ &= d(x, x) + d(x, a) \\ &\quad + 2[d(y, y) + d(y, a)] \\ &\quad + d(z, z) + d(z, a) \end{aligned}$$

$$= S(x, x, a) + 2S(y, y, a) \\ + S(z, z, a).$$

Ví dụ 2.5. Cho $X = \mathbb{R}$ và ánh xạ $S: X^3 \rightarrow [0, +\infty)$ được xác định bởi $S(x, y, z) := |x - z|^2 + |y - z|^2$. Khi đó S là một $S(1,1,2)$ -metric.

Thật vậy, trước hết ta chỉ ra S là một $S(1,1,2)$ -metric. Dễ dàng kiểm tra được S thỏa mãn điều kiện (Si), ta chỉ cần chỉ ra S thỏa mãn (Sii), với mọi $x, y \in X$ ta có $R(x, y) = S(x, x, y) = 2|x - y|^2$. Hơn nữa, với mọi $x, y, z, a \in X$ thì

$$|x - z|^2 = |x - a + a - z|^2 \\ \leq 2|x - a|^2 + 2|z - a|^2$$

Và

$$|y - z|^2 = |y - a + a - z|^2 \\ \leq 2|y - a|^2 + 2|z - a|^2$$

Do đó

$$S(x, y, z) \\ = |x - z|^2 + |y - z|^2 \\ \leq 2|x - a|^2 + 2|y - a|^2 + 4|z - a|^2 \\ = R(x, a) + R(y, a) + 2R(z, a).$$

Mệnh đề 2.6. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric. Với mọi $x, y \in X$ ta luôn có

$$R(x, y) \leq q_3 R(y, x).$$

Thật vậy, từ (Sii') ta có

$$R(x, y) = S(x, x, y) \\ \leq (q_1 + q_2)R(x, x) + q_3 R(y, x) \\ = q_3 R(y, x).$$

Mệnh đề 2.7. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric. Với mọi

$x, y, z \in X$ ta có

$$R(x, z) \leq (q_1 + q_2)R(x, y) + q_3^2 R(y, z).$$

Thật vậy, từ (Sii') và mệnh đề 2.6 ta có

$$R(x, z) \\ = S(x, x, z) \\ \leq (q_1 + q_2)R(x, y) + q_3 R(z, y) \\ \leq (q_1 + q_2)R(x, y) + q_3^2 R(y, z).$$

Nhận xét 2.8. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric. Nếu ta đặt $q = \max\{q_1 + q_2, q_3^2\}$ thì từ mệnh đề 2.7, với mọi $x, y, z \in X$ ta có

$$a) R(x, z) \leq q[R(x, y) + R(y, z)]$$

$$b) R(x, y) \leq qR(y, x)$$

Bổ đề 2.9. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric và cho $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in X$ với $n \in \mathbb{N}$. Đặt $q = \max\{q_1 + q_2, q_3^2\}$ thì ta có

$$R(x_0, x_{n+1}) \leq qR(x_0, x_1) + \\ q^2 R(x_1, x_2) + \dots + q^{n+1} R(x_n, x_{n+1}). \quad (1)$$

Thật vậy, ta có (1) đúng với $n = 0$ và $n = 1$, giả sử (1) đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}$; khi đó ta có

$$R(x_0, x_{k+1}) \leq qR(x_0, x_1) + q^2 R(x_1, x_2) \\ + \dots + q^{k+1} R(x_k, x_{k+1})$$

Xét

$$R(x_0, x_{k+2}) \\ \leq qR(x_0, x_1) + qR(x_1, x_{1+(k+1)}) \\ \leq qR(x_0, x_1) + q[qR(x_1, x_2) \\ + q^2 R(x_2, x_3) + \dots \\ + q^{k+1} R(x_{1+k}, x_{1+(k+1)})]$$

$$\leq qR(x_0, x_1) + q^2R(x_1, x_2) + q^3R(x_2, x_3) + \dots + q^{k+2}R(x_{k+1}, x_{k+2}).$$

Do đó (1) đúng với $n = k + 1$, theo nguyên lý quy nạp suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Các khái niệm cơ bản khác được định nghĩa tương tự như không gian metric cổ điển.

Định nghĩa 2.10. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric, $\{x_n\}$ là một dãy trong X và $x \in X$. Khi đó, ta có các định nghĩa sau

- a) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ về x theo $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric S nếu dãy $\{R(x_n, x)\}$ hội tụ về 0. Khi đó ta viết $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ hoặc $x_n \rightarrow x$ khi $n \rightarrow \infty$.
- b) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ và với mọi $p \in \mathbb{N}$ thì $R(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.
- c) Không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric được gọi là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ, khi đó ánh xạ S được gọi là $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric đầy đủ.

Nhận xét 2.11. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric, $\{x_n\}$ là một dãy trong X và $x \in X$. Khi đó ta có các nhận xét sau

- a) Dãy $\{R(x, x_n)\}$ hội tụ về 0 \Leftrightarrow Dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x .

- b) Nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ và với mọi $p \in \mathbb{N}$ thì $R(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$. Khi đó $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy.

Nhận xét 2.12. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X . Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ về $x \in X$ thì giới hạn đó là duy nhất.

Nhận xét 2.13. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X hội tụ về $x \in X$. Khi đó mọi dãy con $\{x_{k_n}\}$ của dãy $\{x_n\}$ đều hội tụ về x .

Nhận xét 2.14. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X . Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì nó là dãy Cauchy.

Nhận xét 2.15. Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X . Nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy, khi đó nếu dãy con $\{x_{k_n}\}$ của dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x thì dãy $\{x_n\}$ cũng hội tụ về x , với $x \in X$.

Chứng minh

Thật vậy, giả sử $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy và $\{x_{k_n}\}$ là dãy con của dãy $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{k_n}\}$ hội tụ về $x \in X$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, suy ra $\frac{\varepsilon}{q_1+q_2+q_3^2} > 0$, tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_1$ thì $R(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{q_1+q_2+q_3^2}$. Mặt khác, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_2$ thì $R(x_n, x_{k_n}) <$

$\frac{\varepsilon}{q_1+q_2+q_3^2}$. Khi đó, với mọi $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì $R(x_n, x) \leq (q_1 + q_2)R(x_n, x_{k_n}) + q_3^2 R(x_{k_n}, x) < \frac{(q_1+q_2+q_3^2)\varepsilon}{q_1+q_2+q_3^2} = \varepsilon$. Như vậy, dãy $\{x_n\}$ hội tụ về $x \in X$.

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Định lý 3.1 (Định lý Suzuki cho $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric).

Cho (X, S, q_1, q_2, q_3) là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric đầy đủ và ánh xạ $T: X \rightarrow X$. Đặt $q = \max\{q_1 + q_2, q_3^2\}$, định nghĩa hàm θ như sau:

$$\theta(r) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{nếu } 0 \leq rq^2 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{1-rq^2}{(rq^2)^2q}, & \text{nếu } \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq rq^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{(1+rq^2)q}, & \text{nếu } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq rq^2 < 1 \end{cases}$$

Giả sử rằng tồn tại $r \in [0, \frac{1}{q^2})$ sao cho

$$\begin{aligned} \theta(r)R(x, Tx) &\leq R(x, y) \\ \Rightarrow R(Tx, Ty) &\leq \frac{rR(x, y)}{q^3}, \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Khi đó tồn tại duy nhất điểm bất động z của T . Hơn nữa $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = z, \forall x \in X$.

Chứng minh.

Với mọi $x, y \in X$ ta luôn có $\frac{rR(x, y)}{q^3} \leq rR(x, y)$.

Vì $\theta(r) \leq 1$ nên $\theta(r)R(x, Tx) \leq R(x, Tx)$, từ giả thiết suy ra

$$R(Tx, T^2x) \leq rR(x, Tx), \forall x \in X. \quad (1)$$

Chọn $u \in X$ và định nghĩa dãy $\{u_n\}$ trong X bởi $u_0 = u, u_n = T^n u$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, từ (1) ta có

$$\begin{aligned} R(u_n, u_{n+1}) &\leq rR(u_{n-1}, u_n) \\ &\leq r^2R(u_{n-2}, u_{n-1}) \\ &\leq \dots \leq r^n R(u, Tu). \end{aligned}$$

Hay

$$R(u_n, u_{n+1}) \leq r^n R(u, Tu), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1')$$

Với mọi $p \in \mathbb{N}$, từ (1') và Bổ đề 2.9 ta có

$$\begin{aligned} R(u_n, u_{n+p+1}) &\leq qR(u_n, u_{n+1}) + q^2R(u_{n+1}, u_{n+2}) + \dots \\ &\quad + q^{p+1}R(u_{n+p}, u_{n+p+1}) \\ &\leq R(u, Tu)(qr^n + q^2r^{n+1} + \dots \\ &\quad + q^{p+1}r^{n+p}) \\ &= R(u, Tu)r^{n-1}[(qr) + (qr)^2 + \dots \\ &\quad + (qr)^{p+1}] \\ &\leq R(u, Tu)r^{n-1} \frac{1}{1-qr}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1} = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ suy ra $\frac{\varepsilon(1-qr)}{R(u, Tu)+1} > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $r^{n-1} < \frac{\varepsilon(1-qr)}{R(u, Tu)+1}$; từ đây ta có

$$\begin{aligned} R(u_n, u_{n+p+1}) &\leq R(u, Tu)r^{n-1} \frac{1}{1-qr} \\ &< \varepsilon, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Do đó $\{u_n\}$ là dãy Cauchy. Vì X đầy đủ nên $\{u_n\}$ hội tụ đến $z \in X$. Tiếp theo ta chỉ ra

$$R(Tx, z) \leq rR(z, x), \forall x \in X \setminus \{z\}. \quad (2)$$

Thật vậy, với mọi $x \in X \setminus \{z\}$ suy ra $R(x, z)/3q^5 > 0$, do $\{u_n\}$ hội tụ đến z nên tồn tại $v \in \mathbb{N}$ sao cho $R(u_n, z) < R(x, z)/3q^5$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq v$. Từ đó suy ra

$$R(u_n, z) \leq qR(u_n, z) \leq q^2R(u_n, z) < R(x, z)/3q^3.$$

Khi đó, với mọi $n \geq v$ ta có

$$\begin{aligned} & \theta(r)R(u_n, Tu_n) \\ & \leq R(u_n, Tu_n) \\ & = R(u_n, u_{n+1}) \\ & \leq qR(u_n, z) + qR(z, u_{n+1}) \\ & \leq qR(u_n, z) + q^2R(u_{n+1}, z) \\ & < q \frac{2}{3q^3} R(x, z) \\ & = \frac{1}{q^2} \left[R(x, z) - \frac{1}{3} R(x, z) \right] \\ & < \frac{1}{q^2} [R(x, z) - q^3R(u_n, z)] \\ & \leq \frac{1}{q^2} [R(x, z) - qR(u_n, z)] \\ & \leq \frac{1}{q^2} qR(x, u_n) \\ & \leq \frac{1}{q^2} q^2R(x, u_n) \\ & = R(u_n, x). \end{aligned}$$

Suy ra $\theta(r)R(u_n, Tu_n) \leq R(u_n, x)$, từ giả thiết suy ra $R(u_{n+1}, Tx) = R(Tu_n, Tx) \leq \frac{rR(u_n, x)}{q^3}, \forall n \geq v$. Khi đó

$$\begin{aligned} R(Tx, z) & \leq qR(Tx, u_{n+1}) + qR(u_{n+1}, z) \\ & \leq q^2R(u_{n+1}, Tx) + qR(u_{n+1}, z) \\ & \leq \frac{r q^2 R(u_n, x)}{q^3} + qR(u_{n+1}, z) \\ & \leq rR(u_n, z) + rR(z, x) + qR(u_{n+1}, z). \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$ suy ra $R(Tx, z) \leq rR(z, x)$.

Ta đã chứng minh được (2). Bây giờ ta giả sử rằng $T^j z \neq z, \forall j \in \mathbb{N}$, từ (2) suy ra

$$\begin{aligned} & R(T^{j+1}z, z) \\ & \leq rR(z, T^j) \\ & \leq r q R(T^j, z), \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & R(T^{j+1}z, z) \\ & \leq r q R(T^j, z) \\ & \leq (r q)^2 R(T^{j-1}z, z) \\ & \leq \dots \leq (r q)^{j-1} R(T^2z, z) \\ & \leq r^j q^{j-1} R(z, Tz) \end{aligned}$$

Hay

$$R(T^{j+1}z, z) \leq r^j q^{j-1} R(z, Tz), \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Ta xét 3 trường hợp sau đây:

1. $0 \leq r q^2 \leq (\sqrt{5} - 1)/2$
2. $(\sqrt{5} - 1)/2 < r q^2 < 1/\sqrt{2}$
3. $1/\sqrt{2} \leq r q^2 < 1$

Trường hợp 1. $0 \leq r q^2 \leq (\sqrt{5} - 1)/2$ ta có $(r q^2)^2 + r q^2 \leq 1$ và $2(r q^2)^2 < 1$. Ta giả sử rằng

$$R(T^2z, z) < R(T^2z, T^3z) \quad (*)$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} R(z, Tz) & \leq q[R(z, T^2z) + R(T^2z, Tz)] \\ & \leq q^2[R(T^2z, z) + R(Tz, T^2z)] \\ & < q^2[R(T^2z, T^3z) \\ & \quad + R(Tz, T^2z)] \quad (\text{do } (*)) \\ & \leq q^2[r^2R(z, Tz) + rR(z, Tz)] \quad (\text{do (1)}) \\ & \leq (r^2q^2 + r q^2)R(z, Tz) \\ & \leq [(r q^2)^2 + r q^2]R(z, Tz) \\ & \leq R(z, Tz) \quad (\text{mâu thuẫn}). \end{aligned}$$

Như vậy ta có

$$\begin{aligned} & R(T^2z, z) \\ & \geq R(T^2z, T^3z) \\ & \geq \theta(r)R(T^2z, T(T^2z)) \end{aligned}$$

nên từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} & R(T^3z, Tz) \\ & = R(T(T^2z), Tz) \\ & \leq rR(T^2z, z) \quad (1^*) \end{aligned}$$

Từ (1*) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} R(z, Tz) & \leq qR(z, T^3z) + qR(T^3z, Tz) \\ & \leq q^2R(T^3z, z) + qR(T^3z, Tz) \\ & \leq r^2q^3R(z, Tz) + rqR(T^2z, z) \\ & \leq r^2q^3R(z, Tz) + r^2qR(z, Tz) \\ & \leq 2(rq^2)^2R(z, Tz) < R(z, Tz). \end{aligned}$$

Đây là điều mâu thuẫn.

Trường hợp 2. $(\sqrt{5} - 1)/2 < r q^2 < 1/\sqrt{2}$ ta có $2(rq^2)^2 < 1$.

Giả sử $R(T^2z, z) < \theta(r)R(T^2z, T^3z)$, mà từ (1) ta có $R(T^2z, T^3z) \leq r^2R(z, Tz)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} R(z, Tz) & \leq q[R(z, T^2z) + R(T^2z, Tz)] \\ & \leq q^2[R(T^2z, z) + R(Tz, T^2z)] \\ & < q^2[\theta(r)R(T^2z, T^3z) + R(Tz, T^2z)] \\ & \leq q^2 \left[\frac{1 - rq^2}{(rq^2)^2 q} r^2R(z, Tz) + rR(z, Tz) \right] \\ & = \frac{1 - rq^2}{q^3} R(z, Tz) + rq^2R(z, Tz) \\ & \leq (1 - rq^2)R(z, Tz) + rq^2R(z, Tz) \\ & = R(z, Tz) \text{ (vô lí)}. \end{aligned}$$

Suy ra $\theta(r)R(T^2z, T(T^2z)) \leq R(T^2z, z)$, điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} & R(T^3z, Tz) \\ & = R(T(T^2z), Tz) \\ & \leq rR(T^2z, z). \quad (2^*) \end{aligned}$$

Từ (2*) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} & R(z, Tz) \\ & \leq q[R(z, T^3z) + R(T^3z, Tz)] \\ & \leq q[qR(T^3z, z) + R(T^3z, Tz)] \\ & \leq q[(rq)^2R(z, Tz) + rR(T^2z, z)] \\ & \leq r^2q^3R(z, Tz) + r^2qR(z, Tz) \\ & \leq 2(rq^2)^2R(z, Tz) < R(z, Tz). \end{aligned}$$

Đây là điều mâu thuẫn.

Trường hợp 3. $1/\sqrt{2} \leq r q^2 < 1$. Với mọi $x, y \in X$ ta có

$$\begin{aligned} & \theta(r)R(x, Tx) \leq R(x, y) \\ & \text{hoặc } \theta(r)R(Tx, T^2x) \leq R(Tx, y) \quad (3^*) \end{aligned}$$

Thật vậy, nếu tồn tại $x, y \in X$ sao cho $R(x, y) < \theta(r)R(x, Tx)$ và $R(Tx, y) < \theta(r)R(Tx, T^2x)$ thì khi đó

$$\begin{aligned} & R(x, Tx) \\ & \leq q[R(x, y) + R(y, Tx)] \\ & < q\theta(r)[R(x, Tx) + qR(Tx, T^2x)] \\ & \leq q\theta(r)[R(x, Tx) + r qR(x, Tx)] \\ & \leq \frac{q}{(1 + rq^2)q} (1 + rq)R(x, Tx) \\ & \leq \frac{q}{(1 + rq^2)q} (1 + rq^2)R(x, Tx) \\ & = R(x, Tx) \text{ (vô lí)}. \end{aligned}$$

Do đó, từ (3*) suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\begin{aligned} & \theta(r)R(u_{2n}, Tu_{2n}) \leq R(u_{2n}, z) \\ & \text{hoặc } \theta(r)R(Tu_{2n}, T^2u_{2n}) \leq R(Tu_{2n}, z). \end{aligned}$$

Theo giả thiết suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$R(Tu_{2n}, Tz) \leq rR(u_{2n}, z)$$

$$\text{hoặc } R(T^2u_{2n}, Tz) \leq rR(Tu_{2n}, z)$$

Hay

$$R(u_{2n+1}, Tz) \leq rR(u_{2n}, z)$$

$$\text{hoặc } R(u_{2n+2}, Tz) \leq rR(u_{2n+1}, z).$$

Xét dãy $\{v_n\}$ xác định như sau

$$v_n = \begin{cases} u_{2n+1}, & \text{nếu } R(u_{2n+1}, Tz) \leq rR(u_{2n}, z) \\ u_{2n+2}, & \text{nếu } R(u_{2n+1}, Tz) > rR(u_{2n}, z) \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$R(v_n, Tz) \leq rR(u_{2n}, z)$$

$$\text{hoặc } R(v_n, Tz) \leq rR(u_{2n+1}, z).$$

Vì $\{u_n\}$ hội tụ về z nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq N_0$

$$R(u_n, z) < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Suy ra

$$R(u_{2n}, z) < \frac{\varepsilon}{r} \text{ và } R(u_{2n+1}, z) < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Điều này dẫn đến

$$R(v_n, Tz) < \varepsilon, \forall n \geq N_0.$$

Suy ra, $\{v_n\}$ hội tụ về Tz . Mà $\{v_n\}$ là dãy con của dãy $\{u_n\}$ do đó từ Nhận xét 2.12 và 2.15 suy ra $Tz = z$. Điều này mâu thuẫn với điều giả sử là $T^j z \neq z, \forall j \in \mathbb{N}$.

Như vậy, cả 3 trường hợp của rq^2 đều dẫn đến mâu thuẫn. Do đó tồn tại $j_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $T^{j_0} z = z$. Khi đó từ nguyên lý quy nạp ta có $T^{nj_0} z = z$ và $T^{nj_0+1} = Tz$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ (1) ta có

$$\begin{aligned} R(T^n z, T^{n+1} z) &\leq rR(T^{n-1} z, T^n z) \\ &\leq r^2 R(T^{n-2} z, T^{n-1} z) \\ &\leq \dots \leq r^n R(z, Tz) \end{aligned}$$

Hay

$$R(T^n z, T^{n+1} z) \leq r^n R(z, Tz), \forall n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Từ (4) và Bổ đề 2.9 ta có

$$\begin{aligned} R(T^n z, T^{n+p+1} z) &\leq qR(T^n z, T^{n+1} z) \\ &\quad + q^2 R(T^{n+1} z, T^{n+2} z) + \dots \\ &\quad + q^{p+1} R(T^{n+p} z, T^{n+p+1} z) \\ &\leq R(z, Tz)(qr^n + q^2 r^{n+1} + \dots \\ &\quad + q^{p+1} r^{n+p}) \\ &= R(z, Tz)r^{n-1}[(qr) + (qr)^2 + \dots \\ &\quad + (qr)^{p+1}] \\ &\leq R(z, Tz)r^{n-1} \frac{1}{1-qr}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1} = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ suy ra $\frac{\varepsilon(1-qr)}{d(z, Tz)+1} > 0$, tồn tại $n_0' \in \mathbb{N}$ sao

cho với mọi $n \geq n_0'$ thì $r^{n-1} < \frac{\varepsilon(1-qr)}{d(z, Tz)+1}$, từ đây ta có

$$\begin{aligned} R(T^n z, T^{n+p+1} z) &\leq R(z, Tz)r^{n-1} \frac{1}{1-qr} \\ &< \varepsilon, \forall n \geq n_0'. \end{aligned}$$

Do đó, $\{T^n z\}$ là dãy Cauchy. Vì X đầy đủ nên $\{T^n z\}$ hội tụ đến $a \in X$. Mà giới hạn của hai dãy con $\{T^{nj_0} z\}$ và $\{T^{nj_0+1} z\}$ lần lượt là z và Tz nên từ Nhận xét 2.12 và 2.15 suy ra $a = z$ và $a = Tz$. Từ đây suy ra $z = Tz$.

Hơn nữa, z là điểm bất động duy nhất của T . Thật vậy, giả sử tồn tại $t \in X$ sao cho $Tt = t$ mà $t \neq z$, từ (2) ta có

$$\begin{aligned} R(t, z) &= R(Tt, z) \\ &\leq rR(z, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq r q R(t, z) \\ &\leq r q^2 R(t, z). \end{aligned}$$

Suy ra $r q^2 \geq 1$ hay $r \geq 1/q^2$ (mâu thuẫn). Định lý 3.1 đã được chứng minh.

Ví dụ 3.2. Cho $(\mathbb{R}, S, q_1, q_2, q_3)$ là không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric với S xác định bởi $S(x, y, z) := |x - z|^2 + |y - z|^2$ và ánh xạ $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$T(x) := \begin{cases} \frac{x}{1000} \operatorname{si} \left(e^{\frac{1}{x^2}} \right), & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ \frac{\int_0^x \cos(t^2) \sin(t^3) dt}{1000}, & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Khi đó, S là một $S(1,1,2)$ -metric đầy đủ và T có duy nhất điểm bất động.

Thật vậy, từ Ví dụ 2.5 suy ra, S là một $S(1,1,2)$ -metric. Ta chứng minh S là đầy đủ. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy bất kì trong X , khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_1$ và $p \in \mathbb{N}$ thì $R(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ hay $|x_n - x_{n+p}| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. Đặt $\varepsilon' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, do \mathbb{R} cùng với metric $d(x, y) = |x - y|$ là đầy đủ nên tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ và $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - x_0| < \varepsilon'$ với mọi $n \geq n_2$. Từ đó suy ra

$$2|x_n - x_0|^2 < \varepsilon, \forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$$

Hay

$$R(x_n, x_0) < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Do đó, $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 nên S là đầy đủ.

Ánh xạ T mà ta định nghĩa như trên không thỏa mãn điều sau: tồn tại $k \in [0,1)$ sao cho $(Tx, Ty) \leq kR(x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}$. Đặt $f(x) = \frac{x}{1000} \operatorname{si} \left(e^{\frac{1}{x^2}} \right)$, ta dễ dàng kiểm tra được $\lim_{x \rightarrow 0} |f'(x)| = +\infty$. Do đó, tồn tại $x, y \in \mathbb{Q}$ sao cho

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > 1.$$

Hay

$$|f(x) - f(y)| > |x - y|$$

Suy ra, $2|Tx - Ty|^2 > 2|x - y|^2$ (do $x, y \in \mathbb{Q}$) nên $R(Tx, Ty) > kR(x, y)$ với mọi $k \in [0,1)$.

Bây giờ ta chứng minh T có duy nhất điểm bất động bằng cách sử dụng Định lý 3.1. Trước hết ta có $q = \max\{q_1 + q_2, q_3^2\} = 4$. Chọn $r = 0,01 \in [0, \frac{1}{q^2})$. Khi đó $\theta(r) = \frac{1}{4}$ và $\frac{r}{q^3} = \frac{1}{6400}$. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{4} R(x, Tx) \leq R(x, y)$$

$$\Rightarrow R(Tx, Ty) \leq \frac{R(x, y)}{6400}.$$

Điều này tương đương với

$$\frac{1}{2} |x - Tx| \leq |x - y|$$

$$\Rightarrow |Tx - Ty| \leq \frac{|x - y|}{80}.$$

Dễ dàng kiểm tra được $|Tx| \leq \frac{1}{1000} |x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử $x, y \in \mathbb{R}$ bất kì thỏa

$$\frac{1}{2} |x - Tx| \leq |x - y|, \text{ khi đó ta có}$$

$$|x - Tx| \geq |x| - |Tx| \geq \frac{999}{1000}|x|.$$

Từ đây suy ra $\frac{999}{2000}|x| \leq |x - y|$ hay

$$|x| \leq \frac{2000}{999}|x - y|. \text{ Lại có}$$

$$\begin{aligned} |y| &\leq |x - y| + |x| \\ &\leq |x - y| + \frac{2000}{999}|x - y| \\ &\leq \frac{2999}{999}|x - y|. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &\leq |Tx| + |Ty| \\ &\leq \frac{1}{1000}(|x| + |y|) \\ &\leq \frac{1}{1000}\left(\frac{2000}{999} + \frac{2999}{999}\right)|x - y| \\ &\leq \frac{4999}{999000}|x - y| \leq \frac{1}{80}|x - y|. \end{aligned}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Bakhtin, I. A. (1989), "The contraction mapping principle in almost metric spaces", *Functional Analysis, Gos. Ped. Inst. Unianowsk*, 30, 26-37.
- [2] Banach, S. (1922), "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales", *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133-181.
- [3] Czerwik, S. (1993), "Contraction mappings in b-metric spaces", *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1 (1), 5-11.
- [4] Esfahani, J., Mitrovi, Z. D., Radenovi, S., & Sedghi, S. (2018), "Suzuki-type fixed point results in S-metric type spaces", *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, 25.
- [5] Matthews, S. G. (1994), "Partial Metric Topology", *Annals of the New York Academy of Sciences*, 728 (1).
- [6] Mustafa, Z., & Sims, B. (2006), "A New Approach To Generalized Metric Spaces", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 7 (2).
- [7] Roshan, J. R., Hussain, N., Sedghi, S., & Shobkolaei, N. (2015), "Suzuki-type fixed point results in b-metric spaces", *Mathematical Sciences*, 9 (3).
- [8] Sedghi, S., Gholidahneh, A., Došenović, T., Esfahani, J., & Radenović, S. (2016), "Common fixed point of four maps in S b-metric spaces", *Journal of Linear and Topological Algebra*, 05(02), 93-104.
- [9] Sedghi, S., Shobe, N., & Aliouche, A. (2012), "A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces",

Khi đó áp dụng Định lý 3.1 ta suy ra T có duy nhất điểm bất động, hơn nữa dễ dàng thấy được điểm bất động của T là $z=0$

4. KẾT LUẬN

Tóm lại, bài báo đã mở rộng định lý Suzuki trên các lớp không gian $S(q_1, q_2, q_3)$ -metric bằng cách kế thừa và phát triển các ý tưởng từ định lý Suzuki cổ điển cũng như các kết quả đã có trên b-metric, S-metric... Kết quả thu được của bài báo không chỉ góp phần làm phong phú lý thuyết điểm bất động trong các không gian metric suy rộng, mà còn mở ra những hướng nghiên cứu tiếp theo liên quan đến tính đầy đủ, sự hội tụ của dãy lặp và các ứng dụng tiềm năng trong giải tích phi tuyến.

- Matematicki Vesnik*, 64 (3).
[10] Suzuki, T. (2008), “A generalized Banach contraction principle that characterizes

metric completeness”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136 (05).

Liên hệ:

Nguyễn Sỹ Thắng

Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng.

Địa chỉ: 459 Tôn Đức Thắng, Hòa Khánh Nam, Quận Liên Chiểu, TP. Đà Nẵng.

Email: sythangtanlong123@gmail.com

Ngày nhận bài: 23/02/2026

Ngày gửi phản biện: 08/3/2026

Ngày duyệt đăng: 05/6/2026