

HAUSDORFF CONVERGENCE FOR DOUBLE ARRAYS OF M -BLOCKWISE DEPENDENT FUZZY RANDOM VARIABLES

SỰ HỘI TỤ HAUSDORFF CHO MẢNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN MỜ M -PHỤ THUỘC THEO KHỐI

Hoàng Thị Duyên

Trường Đại học Quảng Bình

ABSTRACT: This paper studies sufficient conditions for Hausdorff convergence of double arrays of fuzzy random variables which are blockwise M -dependent but not necessarily identically distributed taking values in a separable Banach space as $\max(m, n) \rightarrow \infty$. Thus, our main result extended the result in [4] to arrays of fuzzy random variables in separable Banach space.

Keyword: Random sets, fuzzy random variables, M dependent, expectation.

TÓM TẮT: Bài báo này nghiên cứu các điều kiện đủ cho sự hội tụ Hausdorff của mảng các biến ngẫu nhiên mờ M -phụ thuộc theo khối bất kỳ, không nhất thiết cùng phân phối trong không gian Banach thực khả ly khi $\max(m, n) \rightarrow \infty$. Kết quả chính của bài báo này đã mở rộng kết quả của [4] sang mảng các biến ngẫu nhiên mờ trong không gian Banach thực khả ly.

Từ khóa: Biến ngẫu nhiên đa trị, biến ngẫu nhiên mờ, M -phụ thuộc, kỳ vọng.

1. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, ta kí hiệu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ, $\mathbb{E}$ là không gian Banach thực khả ly với chuẩn $\|\cdot\|$ và $\mathbb{E}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathbb{E}$. Ta còn gọi $\overline{B}_{\mathbb{E}^*}^c$ là hình cầu đơn vị đóng trong $\mathbb{E}^*$ liên kết với tô pô của sự hội tụ compact và $C(\overline{B}_{\mathbb{E}^*}^c)$ là không gian Banach thực khả ly gồm những hàm liên tục φ xác định trên $\overline{B}_{\mathbb{E}^*}^c$ liên kết với chuẩn của sự hội tụ đều $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x^* \in \overline{B}_{\mathbb{E}^*}^c} |\varphi(x^*)|$.

Với hai số nguyên dương $m, n, m \vee n$ kí

hiệu cho $\max(m, n)$ để phân biệt với kí hiệu $m \wedge n$ là $\min(m, n)$ khi nghiên cứu sự hội tụ của mảng các biến ngẫu nhiên. Đối với họ những tập con của $\mathbb{E}$, ta kí hiệu $c(\mathbb{E})$ (tương ứng, $cc(\mathbb{E}), ck(\mathbb{E}), k(\mathbb{E})$) là họ gồm các tập con đóng (tương ứng, lồi đóng, compact lồi, compact) khác rỗng của $\mathbb{E}$, và $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ là σ -đại số Borel trên $\mathbb{E}$.

Với $A \subset \mathbb{E}$, khoảng cách từ $x \in \mathbb{E}$ đến A là $d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$. Ta còn định nghĩa hàm giá $\delta^*(\cdot, A)$ của A như sau với $x^* \in \mathbb{E}^*$, $\delta^*(x^*, A) = \sup\{< x^*, a > : a \in A\}$. Giả sử $A, B \in c(\mathbb{E})$ và

$\lambda \in \mathbb{R}$. Trên $c(\mathbb{E})$ ta định nghĩa các phép toán

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Với định nghĩa ở trên, có thể chỉ ra rằng nếu $A, B \in k(\mathbb{E})$ thì $A + B \in k(\mathbb{E})$. Khoảng cách Hausdorff của A và B trong $k(\mathbb{E})$ được định nghĩa như sau

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right\}.$$

Không gian $(k(\mathbb{E}), d_H)$ là không gian Polish (xem [1]). Với $A \in k(\mathbb{E})$, ta gọi $|A| = \sup_{x \in A} \|x\|$ là độ lớn của tập A . Với U là tập con mở của $\mathbb{E}$, ta gọi họ gồm các tập $U^- = \{F \in c(\mathbb{E}) : F \cap U \neq \emptyset\}$, là σ -đại số Effros và được kí hiệu là $\mathcal{B}_{c(\mathbb{E})}$. Ánh xạ đa trị $X : \Omega \rightrightarrows \mathbb{E}$ nhận giá trị trong $c(\mathbb{E})$ được gọi là biến ngẫu nhiên đa trị nếu X là ánh xạ $\mathcal{F}$ -đo được, nghĩa là với mỗi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{E})$, $X^-(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$.

Với X là biến ngẫu nhiên đa trị, ta kí hiệu $\mathcal{F}_X = \{X^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}_{c(\mathbb{E})}\}$, trong đó $X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in U\}$. Khi đó $\mathcal{F}_X$ là σ -đại số con bé nhất của $\mathcal{F}$ mà X đo được. Phân phối của X là một độ đo xác suất P_X trên $\mathcal{B}_{c(\mathbb{E})}$ và được xác định bởi $P_X(U) = P\{X^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}_{c(\mathbb{E})}\}$.

Ta cũng kí hiệu $L^1_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian Banach gồm các biến ngẫu nhiên $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ sao cho $\|f\|_1 = \mathbb{E}\|f\| < \infty$. Nếu $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ thì ta viết

gọn $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là L^1 . Ta đặt $S^1_X = \{f \in L^1_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathcal{F}, P) : f(\omega) \in X(\omega) \text{ h.c.c.}\}$.

Kỳ vọng $\mathbb{E}X$ của biến ngẫu nhiên đa trị X trên Ω được định nghĩa như sau $\mathbb{E}X = \{\mathbb{E}f : f \in S^1_X\}$, trong đó, $\mathbb{E}f$ là tích phân Bochner thông thường của f . Biến ngẫu nhiên đa trị X được gọi là khả tích nếu tập $S^1_X \neq \emptyset$. Ngoài ra, biến ngẫu nhiên đa trị X được gọi là bị chặn khả tích nếu biến ngẫu nhiên $|X|(\omega) = \sup\{|x| : x \in X(\omega)\}$ khả tích. Ta gọi $\mathcal{L}^1_{ck(\mathbb{E})}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian gồm tất cả các biến ngẫu nhiên đa trị khả tích nhận giá trị compact lồi trong $\mathbb{E}$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số kết quả về tập mờ (xem [6]). Một tập mờ là ánh xạ $u : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ sao cho:

- (1) u là ánh xạ nửa liên tục trên;
- (2) $\{x \in \mathbb{E} : u(x) = 1\} \neq \emptyset$;
- (3) u là hàm lồi mờ, nghĩa là, với mọi $\lambda \in [0, 1]$ và với mọi $x, y \in \mathbb{E}$, ta có

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}.$$

Với mỗi tập mờ u trong $\mathbb{E}$, tập α -mức liên kết với u được định nghĩa bởi

$$u_{\alpha} = \{x \in \mathbb{E} : u(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Ta còn định nghĩa

$$u_{\alpha+} = \text{cl}\{x \in \mathbb{E} : u(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Cho u và v là hai tập mờ trong $\mathbb{E}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$(u + v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u(y), v(z)\}$$

$$\lambda u(x) = \begin{cases} u(\lambda^{-1}x) & \text{nếu } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \lambda = 0. \end{cases}$$

Khi đó $u + v$ và λu là các tập mờ trong $\mathbb{E}$. Ngoài ra,

$$[u + v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha$$

và với mỗi $\lambda \in (0, 1]$, ta có:

$$[\lambda u]_\alpha = \lambda[u]_\alpha.$$

Theo [2], biến ngẫu nhiên mờ là ánh xạ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{E})$ -đo được $X : \Omega \times \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ sao cho với mỗi $\omega \in \Omega$, ánh xạ $X(\omega, \cdot) : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ xác định bởi $X(\omega, \cdot)(x) = X(\omega, x)$ là tập mờ. Với mỗi biến ngẫu nhiên mờ $X : \Omega \times \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$, tập α -mức liên kết với X được định nghĩa bởi $X_\alpha(\omega) = [X(\omega, \cdot)]_\alpha$, trong đó $\omega \in \Omega$ và $\alpha \in (0, 1]$. Ta còn định nghĩa $X_{\alpha+}(\omega) := [X(\omega, \cdot)]_{\alpha+}$, với $\omega \in \Omega$ và $\alpha \in [0, 1]$. Khi đó, ánh xạ đa trị $X_\alpha : \Omega \rightrightarrows \mathbb{E}$ là biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trong không gian $cc(\mathbb{E})$ với mỗi $\alpha \in (0, 1]$. Tương tự, ánh xạ đa trị $X_{\alpha+} : \Omega \rightrightarrows \mathbb{E}$ là biến ngẫu nhiên đa trị với mỗi $\alpha \in [0, 1]$.

Với X, Y là các biến ngẫu nhiên mờ xác định trên $\Omega \times \mathbb{E}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa:

$$(X + Y)(\omega, x) = X(\omega, x) + Y(\omega, x),$$

$$(\lambda X)(\omega, x) = \lambda X(\omega, x).$$

Khi đó với mỗi $\alpha \in (0, 1]$, ta có

$$[X + Y]_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha, [\lambda X]_\alpha = \lambda X_\alpha.$$

Kỳ vọng mờ của biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập mờ $X : \Omega \times \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ là một tập mờ $\widetilde{\mathbb{E}}X : \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ sao cho

$$[\widetilde{\mathbb{E}}X]_\alpha = \mathbb{E}X_\alpha \text{ với mọi } \alpha \in (0, 1].$$

2. KẾT QUẢ CHÍNH

Trong bài báo này, ta xét M là số nguyên không âm. Một họ hữu hạn các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{11}, \dots, X_{mn}\}$ được gọi là M -phụ thuộc nếu $m \vee n \leq M + 1$ hoặc $m \vee n > M + 1$ và các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{11}, \dots, X_{ij}\}$ là độc lập với các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{kl}, \dots, X_{mn}\}$ khi $(k - i) \vee (l - j) > M$. Một mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là M -phụ thuộc nếu với mỗi $m \geq 1, n \geq 1$, các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{11}, \dots, X_{mn}\}$ là M -phụ thuộc.

Giả sử $\{w(k) : k \geq 1\}$ và $\{v(k) : k \geq 1\}$ hai là dãy tăng ngặt các số nguyên dương với $w(1) = v(1) = 1$. Đặt

$$\Delta_{kl} = [w(k), w(k+1)) \times [v(l), v(l+1)).$$

Ta nói rằng mảng các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là M -phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối $\{\Delta_{kl} : k \geq 1, l \geq 1\}$, nếu với mỗi k và l , các biến ngẫu nhiên $\{X_{ij} : (i, j) \in \Delta_{kl}\}$ là M -phụ thuộc. Xét các dãy $\{w(k) : k \geq 1\}$, $\{v(k) : k \geq 1\}$ và $\{\Delta_{kl} : k \geq 1, l \geq 1\}$ được định nghĩa ở trên. Với mỗi $m \geq 0, n \geq 0, k \geq 1, l \geq 1$ ta định nghĩa:

$$\Delta^{(mn)} = \{(i, j) : 2^m \leq i < 2^{m+1}, 2^n \leq j < 2^{n+1}\},$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{kl}^{(mn)} &= \Delta_{kl} \cap \Delta^{(mn)}, \\
I_{mn} &= \{(k, l) : \Delta_{kl}^{(mn)} \neq \emptyset\}, \\
r_k^{(m)} &= \min\{i : i \in [w_k, w_{k+1}) \\
&\quad \cap [2^m, 2^{m+1})\}, \\
s_l^{(n)} &= \min\{i : i \in [v_l, v_{l+1}) \cap [2^n, 2^{n+1})\}, \\
c_{mn} &= \text{card} I_{mn}, \\
\varphi(k, l) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} I_{\Delta^{(ij)}}(k, l),
\end{aligned}$$

trong đó $I_{\Delta^{(ij)}}$ kí hiệu hàm chỉ của tập $\Delta^{(ij)}$, $i \geq 0, j \geq 0$.

Theo [3], nếu $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối $\{\Delta_{kl} : k \geq 1, l \geq 1\}$ thì $\{\delta^*(\cdot, X_{mn}) : m, n \geq 1\}$ là biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối $\{\Delta_{kl} : k \geq 1, l \geq 1\}$.

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập sự hội tụ Hausdorff cho mảng các biến ngẫu nhiên mờ M -phụ thuộc theo khối dưới điều kiện compact khả tích đều. Kết quả này đã tổng quát kết quả của [4] sang mảng các biến ngẫu nhiên mờ.

Định lý 1. *Giả sử $1 \leq p \leq 2$ và $\{X^{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên mờ xác định trên $\Omega \times \mathbb{E}$ thỏa các điều kiện sau:*

- (i) $\sup_{m,n} |X_{0+}^{mn}| \in L^1$;
- (ii) $X_{0+}^{mn}(\omega) \subset \mathbb{E}$ là tập compact với mọi $\omega \in \Omega$ và với mọi $m, n \geq 1$;
- (iii) $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(|X_{0+}^{mn}|^p)}{(mn)^p} [\varphi(m, n)]^{p-1} < \infty$.

- (iv) $\{X_{\alpha}^{mn} : m, n \geq 1\}$ và $\{X_{\alpha+}^{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc theo khối với mỗi $\alpha \in (0, 1]$;
- (v) $\{\delta^*(\cdot, X_{\alpha}^{mn}) : m, n \geq 1\}$ là dãy compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro trong không gian $C(\overline{B}_{\mathbb{E}^*}^c)$ với mỗi $\alpha \in [0, 1]$;

- (vi) Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại phân hoạch $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r = 1$ của $[0, 1]$ sao cho với mọi $m, n \geq 1$,

$$\max_{1 \leq k \leq r} \mathbb{E} d_H(X_{\alpha_{k-1}^+}^{mn}, X_{\alpha_k}^{mn}) < \varepsilon.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
\sup_{\alpha \in (0, 1]} d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha}^i, \right. \\
\left. \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_{\alpha}^i \right) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

h.c.c. khi $m \vee n \rightarrow \infty$

Nhận xét. Theo [2], từ các điều kiện (i) và (ii) suy ra rằng với mỗi $m \geq 1, n \geq 1$, biến ngẫu nhiên đa trị X_{α}^{mn} nhận giá trị trong không gian $\mathcal{L}_{ck(\mathbb{E})}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ và $\delta^*(\cdot, X_{\alpha}^{mn})$ cũng là biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach thực khả ly $C(\overline{B}_{\mathbb{E}^*}^c)$ với mỗi $\alpha \in (0, 1]$. Ngoài ra, [2] cũng chỉ ra rằng, $X_{\alpha+}^{mn}$ là các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trong $k(\mathbb{E})$ với mỗi $\alpha \in [0, 1]$.

Theo [5, Định lý 3.1], điều kiện

- (vi) xảy ra trong trường hợp dãy các biến ngẫu nhiên là cùng phân phối. Tính độc

lập của các điều kiện (iv) và (v) được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của M -phụ thuộc theo khối và compact khả tích đều. (xem [3])

Để chứng minh định lý trên, chúng tôi phát biểu các bổ đề sau đây.

Bổ đề 2. [3, Định lý 3.1] *Giả sử $1 \leq p \leq 2$ và $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathbb{E}$. Nếu $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro, M -phụ thuộc theo khối. Ngoài ra nếu*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\|X_{mn}\|^p)}{(mn)^p} [\varphi(m, n)]^{p-1} < \infty$$

thì ta có

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \mathbb{E}X_{ij}) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Bằng chứng minh tương tự như [4], chúng tôi thiết lập bổ đề dưới đây với điều kiện yếu hơn về tính compact đều Cesàro.

Bổ đề 3. [4, Định lý 3.1] *Giả sử $1 \leq p \leq 2$ và $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị trong không gian $\mathcal{L}_{ck(\mathbb{E})}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, M -phụ thuộc theo khối sao cho mảng $\{\delta^*(\cdot, X_{mn}) : m, n \geq 1\}$ là compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro trong không gian $C(\overline{B}_{\mathbb{E}^*}^c)$. Ngoài ra nếu*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\|X_{mn}\|^p)}{(mn)^p} [\varphi(m, n)]^{p-1} < \infty$$

thì ta có:

$$d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_{ij} \right) \rightarrow 0$$

h.c.c. khi $m \vee n \rightarrow \infty$.

Chứng minh Định lý 1.

Xét $\varepsilon > 0$. Khi đó tồn tại $k = 1, \dots, r$ (phụ thuộc α) sao cho $\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k$. Áp dụng bất đẳng thức tam giác và tính chất của khoảng cách Hausdorff, với mỗi $m \geq 1, n \geq 1$, với mỗi $k = 1, \dots, r$ ta thu được

$$\begin{aligned} & d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha}^{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_{\alpha}^{ij} \right) \\ & \leq d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha}^{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha_k}^{ij} \right) \\ & \quad + d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha_k}^{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_{\alpha_k}^{ij} \right) \\ & \quad + d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_{\alpha_k}^{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_{\alpha}^{ij} \right) \\ & \leq \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_H(X_{\alpha}^{ij}, X_{\alpha_k}^{ij}) \\ & \quad + d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha_k}^{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_{\alpha_k}^{ij} \right) \\ & \quad + \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}d_H(X_{\alpha_k}^{ij}, X_{\alpha}^{ij}). \end{aligned}$$

Với mỗi $k = 1, \dots, r$, vì $\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k$, nên $X_{\alpha_k}^{ij} \subset X_{\alpha}^{ij} \subset X_{\alpha_{k-1}}^{ij+}$ với mọi $i \geq 1, j \geq 1$. Do đó

$$d_H(X_{\alpha_k}^{ij}, X_{\alpha}^{ij}) \leq d_H(X_{\alpha_k}^{ij}, X_{\alpha_{k-1}}^{ij+})$$

với mọi $k = 1, \dots, r$, $i \geq 1, j \geq 1$. Suy ra

$$\begin{aligned}
& d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha}^{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_{\alpha}^{ij} \right) \\
& \leq \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_H(X_{\alpha_{k-1}^+}^{ij}, X_{\alpha_k}^{ij}) \\
& \quad + d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha_k}^{ij}, \right. \\
& \quad \quad \left. \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_{\alpha_k}^{ij} \right) \\
& \quad + \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} d_H(X_{\alpha_k}^{ij}, X_{\alpha_{k-1}^+}^{ij}) \\
& \leq \max_{1 \leq k \leq r} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[d_H(X_{\alpha_{k-1}^+}^{ij}, X_{\alpha_k}^{ij}) \right. \\
& \quad \left. - \mathbb{E} d_H(X_{\alpha_{k-1}^+}^{ij}, X_{\alpha_k}^{ij}) \right] \\
& \quad + d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha_k}^{ij}, \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_{\alpha_k}^{ij} \right) \\
& \quad + 2 \max_{1 \leq k \leq r} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} d_H(X_{\alpha_k}^{ij}, X_{\alpha_{k-1}^+}^{ij}) \\
& := I + II + III.
\end{aligned}$$

Xét I , với mọi $k = 1, \dots, r$ và với mọi $i \geq 1, j \geq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[d_H(X_{\alpha_{k-1}^+}^{mn}, X_{\alpha_k}^{mn})^p]}{(mn)^p} [\varphi(m, n)]^{p-1} \\
& < 2^p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{0+}^{mn}|^p}{(mn)^p} [\varphi(m, n)]^{p-1} < \infty.
\end{aligned}$$

Như vậy, dãy các biến ngẫu nhiên $\{d_H(X_{\alpha_{k-1}^+}^{ij}, X_{\alpha_k}^{ij}) : i, j \geq 1\}$ thỏa các điều

kiện của Bổ đề 2 nên $I \rightarrow 0$ h.c.c. khi $m \vee n \rightarrow \infty$.

Xét

$$\begin{aligned}
II = d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha_k}^{ij}, \right. \\
\left. \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_{\alpha_k}^{ij} \right).
\end{aligned}$$

Vì $\{X_{\alpha_k}^{ij} : i, j \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc theo khối thỏa các điều kiện của Bổ đề 3 nên ta thu được

$$\begin{aligned}
& d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha_k}^{ij}, \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_{\alpha_k}^{ij} \right) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

h.c.c. khi $m \vee n \rightarrow \infty$ với mọi $k = 1, \dots, r$.

Từ điều kiện v) ta cũng có $III < 2\varepsilon$ với mọi $m, n \geq 1$. Kết hợp các lập luận ở trên ta thu được

$$\begin{aligned}
& d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha}^{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_{\alpha}^{ij} \right) \\
& \leq I + II + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

h.c.c. với mọi $m \geq 1, n \geq 1$. Vì I, II và ε không phụ thuộc vào α nên ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
& \sup_{\alpha \in (0,1]} d_H \left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{\alpha}^{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_{\alpha}^{ij} \right) \\
& \leq I + II + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

h.c.c. với mọi $m \geq 1, n \geq 1$. Trong bất đẳng thức trên, cho $m \vee n \rightarrow \infty$ ta nhận được kết luận của Định lý.

3. KẾT LUẬN

Trên đây, chúng tôi đã thiết lập kết quả mới về sự hội tụ Hausdorff cho mảng các biến ngẫu nhiên mờ M -phụ thuộc theo khối bất kỳ khi mảng các biến ngẫu nhiên là compact khả tích đều Cesàro. Trong thời gian tới, chúng tôi dự định

nghiên cứu các dạng hội tụ khác nhau (hội tụ Wijsman, hội tụ Mosco, hội tụ epi, ...) cho dãy hoặc mảng các biến ngẫu nhiên đa trị hoặc biến ngẫu nhiên mờ dưới điều kiện compact khả tích đều và các cấu trúc phụ thuộc yếu hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math. 580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [2] C. Castaing, C. Godet-Thobie, T. D. Hoang, P. Raynaud de Fitte (2015), On the integration of fuzzy level sets, in: *Advances in Mathematical Economics* (S. Kusuoka and T. Maruyama, eds.), 19, Springer, Tokyo, 1-32.
- [3] C. Castaing, H. T. Duyen, N. V. Quang (2023), Strong laws of large numbers for double arrays of blockwise M -dependent random sets, *Vietnam Journal of Mathematics* 51, 379–396.
- [4] Hoàng Thị Duyên (2023), Luật mạnh số lớn cho mảng các biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc theo khối, *Tạp chí KH và CN Trường Đại học Quảng Bình*, Tập 1 Số 23.
- [5] S.Y. Joo, Y.K. Kim, J.S. Kwon (2006), Strong convergence for weighted sums of fuzzy random sets, *Information Sciences*, 176 (8), 1086-1099. Sang Yeol Joo a,1, Yun Kyong Kim b,*, Joong Sung Kwon c,2.
- [6] L. H. Zadeh: Fuzzy sets, *Inform. Control* 8 (1966) 338-353.

Liên hệ:

TS. Hoàng Thị Duyên

Khoa Sư phạm, Trường Đại học Quảng Bình

Địa chỉ: 18 Nguyễn Văn Linh, phường Đồng Thuận, tỉnh Quảng Trị

Email: duyenht@quangbinhuni.edu.vn

Ngày nhận bài: 11/5/2025

Ngày gửi phản biện: 11/5/2025

Ngày duyệt đăng: 15/03/2026