

TECHNIQUES OF APPLYING AND UTILIZING INEQUALITIES

KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC VÀ ÁP DỤNG

Nguyễn Kế Tam

Trường Đại học Quảng Bình

ABSTRACT: The article presents methods and techniques for creative approaches in proving inequalities, specifically focusing on the techniques of choosing critical points in proving the Mean-Average Inequality, Bunhiacopxki Inequality, and the technique of proving inequalities using the tangent method. These techniques offer readers a more accessible perspective on inequalities and enables them to find creativity way in proving inequalities and constructing new exercises.

Keywords: Inequalities, innovative, tangent method.

TÓM TẮT: Bài báo trình bày một số phương pháp hình thành kỹ thuật trong chứng minh bất đẳng thức, cụ thể các kỹ thuật chọn điểm rơi trong chứng minh bất đẳng thức Trung bình cộng-trung bình nhân, Bunhiacopxki, kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp tiếp tuyến. Những kỹ thuật này giúp cho người đọc có cách nhìn về bất đẳng thức theo hướng dễ tiếp cận hơn từ đó có cách tìm sáng tạo trong chứng minh bất đẳng thức và xây dựng các bài tập mới.

Từ khóa: Bất đẳng thức, sáng tạo, phương pháp tiếp tuyến.

1. GIỚI THIỆU

Bất đẳng thức luôn là một chủ đề khó đối với cả học sinh và giáo viên. Điều khó khăn nằm ở việc thực hiện các phép biến đổi và áp dụng các suy luận một cách linh hoạt vào từng bài toán. Mặc dù có thể hiểu khi đọc, nhưng việc tự mình giải quyết các bài tập liên quan lại là một thách thức đối với nhiều người. Có nhiều sách viết về bất đẳng thức, tuy nhiên nội dung quá hàn lâm và rất khó để người đọc tiếp cận [2,3].

Nhận thức được điều này, chúng tôi viết bài báo này nhằm giúp độc giả tiếp cận với các phương pháp giải bài toán bất đẳng thức một cách dễ dàng hơn, từ đó có thể tự tin áp dụng vào các bài tập thực hành. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu ba kỹ thuật phổ biến

được sử dụng trong việc giải quyết bất đẳng thức: kỹ thuật dùng bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân, kỹ thuật dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki và kỹ thuật dùng tiếp tuyến. Thông qua các ví dụ cụ thể, chúng tôi phân tích và minh họa cách áp dụng các kỹ thuật này một cách tự nhiên, nhằm giúp độc giả hiểu rõ và có thể áp dụng chúng vào các bài toán khác. Những nội dung được trình bày trong bài báo sẽ đáp ứng được tính sáng tạo trong việc triển khai chương trình giáo dục phổ thông 2018 [1].

2. NỘI DUNG

2.1. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân

Trong khuôn khổ bài báo này, chúng tôi sử dụng bất đẳng thức Trung

bình cộng - trung bình nhân (trong chương trình phổ thông vẫn thường gọi với tên bất đẳng thức Cauchy) cho dạng 2 số, 3 số quen thuộc.

Với $a, b \geq 0$ khi đó $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Với $a, b, c \geq 0$ khi đó $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 1. Cho $x \geq 2$, tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x + \frac{2}{x}$.

Giải. Biến đổi $S = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Trung bình cộng - trung bình nhân cho 2 số không âm

$\frac{x}{2}, \frac{2}{x}$ ta có

$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x}} = 2$, dấu bằng xảy ra

khi $\frac{x}{2} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Khi đó $S = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{x}{2} \geq 2 + \frac{2}{2} = 3$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của S bằng 3 khi $x = 2$.

Đối với Ví dụ 1 này, nhiều người giải sẽ biến đổi

$S = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi

$x = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Sai lầm

ở đây là $\sqrt{2} < 2$, mà theo điều kiện là $x \geq 2$, nên dấu bằng trong bất đẳng thức không thể xảy ra. Như vậy là ta sẽ biến đổi bất đẳng thức sao cho dấu bằng xảy ra tại $x = 2$. Do đó ta tìm số thực dương k sao cho $kx = \frac{2}{x}$, thay $x = 2$ ta tìm được $k = \frac{1}{2}$. Từ đó có được lời giải như trình bày ở trên.

Ví dụ 2. Cho $x, y > 0$, thỏa mãn $x + y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$S = \frac{3x}{2} + \frac{11y}{8} + \frac{2}{x} + \frac{6}{y}$.

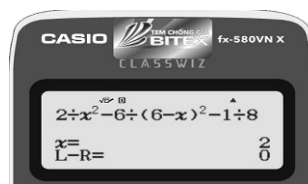
Phân tích. Ta tìm các hệ số dương m, n sao cho

$mx = \frac{2}{x}; ny = \frac{6}{y}; x + y = 6; \frac{3}{2} - m = \frac{11}{8} - n$,

thực hiện phép biến đổi ta có được phương trình

$\frac{2}{x^2} - \frac{6}{(6-x)^2} = \frac{1}{8}$, sử dụng máy tính

bỏ túi Casio giải được nghiệm $x = 2$.



Từ đó $y = 4, m = \frac{1}{2}, n = \frac{3}{8}$. Với kết

quả phân tích, ta có lời giải cho bài toán như sau.

Giải. Biến đổi

$$S = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3y}{8} + \frac{6}{y} + x + y.$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x}} = 2,$$

$$\frac{3y}{8} + \frac{6}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3y}{8} \cdot \frac{6}{y}} = 3 \text{ khi đó}$$

$$S \geq 2 + 3 + 6 = 11.$$

Giá trị nhỏ nhất của S bằng 11, dấu bằng xảy ra khi $x = 2, y = 4$.

Ví dụ 3. Cho $x, y > 0$, thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = (1 - \frac{1}{x^2})(1 - \frac{1}{y^2}).$$

Giải. Điều kiện và giá trị của biểu thức S là những biểu thức đối xứng đối với x, y . Do đó ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y$ và $x + y = 1$, khi đó

$$x = y = \frac{1}{2}.$$

Biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned} S &= (1 - \frac{1}{x^2})(1 - \frac{1}{y^2}) = 1 - (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}) + \frac{1}{x^2 y^2} \\ &= 1 - (\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}) + \frac{1}{x^2 y^2}. \end{aligned}$$

Từ điều kiện $x + y \leq 1$ ta có

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &\leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 - 2xy \\ \Leftrightarrow -(x^2 + y^2) &\geq 2xy - 1. \end{aligned}$$

$$S \geq 1 + \frac{2xy - 1}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 y^2} = 1 + \frac{2}{xy}.$$

Mặt khác từ giả thiết $1 \geq x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ta

$$\text{có } 1 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \geq 4. \text{ Từ đó}$$

$S \geq 1 + 2 \cdot 4 = 9$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của S bằng 9 khi $x = y = \frac{1}{2}$.

2.2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Bất đẳng thức Bunhiacopxki áp dụng cho hai bộ hai số hạng $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$

$$|a_1 a_2 + b_1 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

Bất đẳng thức Bunhiacopxki áp dụng cho hai bộ ba số hạng

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2),$$

$$\begin{aligned} |a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2| \\ \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \end{aligned}$$

dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Ví dụ 4. Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Giải. Vai trò của x, y, z là như nhau nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi

$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Ta tìm hai số dương m, n để áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$mx + \frac{n}{x} \leq \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{1/x} \Rightarrow 9m = n \text{ do đó ta chọn}$$

$m=1, n=9$. Khi đó

$$x + \frac{9}{x} \leq \sqrt{9^2 + 1^2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{82} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

Tương tự ta cũng có

$$y + \frac{9}{y} \leq \sqrt{82} \cdot \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} \text{ và}$$

$$z + \frac{9}{z} \leq \sqrt{82} \cdot \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}.$$

Cộng theo vế ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{82} \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \right) \\ & \geq (x + y + z) + 9 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } 81x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{81x \cdot \frac{9}{x}} = 54,$$

$$\text{tương tự } 81y + \frac{9}{y} \geq 54,$$

$$81z + \frac{9}{z} \geq 54, \text{ nên}$$

$$81(x + y + z) + 9 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 3 \cdot 54 = 162$$

theo giả thiết $x + y + z \leq 1$ ta có

$$80.1 + (x + y + z) + 9 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\geq 81(x + y + z) + 9 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 162.$$

$$\text{Nên } (x + y + z) + 9 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 82$$

từ đó

$$\sqrt{82} \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \right)$$

$$\geq 82.$$

Vậy

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Ví dụ 5. Cho x, y, z là ba số dương thỏa

mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$. Tìm giá

trị lớn nhất của

$$S = \frac{1}{4x + y + z} + \frac{1}{x + 4y + z} + \frac{1}{x + y + 4z}.$$

Giải. Vai trò của x, y, z là như nhau nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 3$.

$$\sqrt{\frac{4}{x}} \cdot \sqrt{4x} + \sqrt{\frac{1}{y}} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{\frac{1}{z}} \cdot \sqrt{z}$$

$$\leq \sqrt{\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \cdot \sqrt{4x + y + z}$$

do đó

$$6 \leq \sqrt{\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \cdot \sqrt{4x + y + z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4x + y + z} \leq \frac{1}{36} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

tương tự ta có

$$\frac{1}{x + 4y + z} \leq \frac{1}{36} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z} \right) \text{ và}$$

$$\frac{1}{x + y + 4z} \leq \frac{1}{36} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} \right).$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta

$$\text{có } S \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 6. Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = \sqrt{x^2 + \frac{1}{y+z}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{z+x}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{x+y}}$$

Giải. Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 2$.

$$4x + \frac{1}{\sqrt{y+z}} \leq \sqrt{4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{y+z}}$$

do đó

$$\sqrt{17} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{y+z}} \geq 4x + \frac{1}{\sqrt{y+z}}$$

tương tự

$$\sqrt{17} \cdot \sqrt{y^2 + \frac{1}{z+x}} \geq 4y + \frac{1}{\sqrt{z+x}},$$

$$\sqrt{17} \cdot \sqrt{z^2 + \frac{1}{x+y}} \geq 4z + \frac{1}{\sqrt{x+y}}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta

$$\sqrt{17} \cdot S \geq 4(x + y + z)$$

$$\text{có } + \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}}.$$

Tiếp tục sử dụng dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 2$ trong áp dụng bất đẳng thức Trung bình cộng-trung bình nhân, ta tìm số dương k sao cho

$$k(x + y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}} \Leftrightarrow k = \frac{1}{8}.$$

Tiếp tục đánh giá

$$\frac{x+y}{8} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}$$

$$\geq 3 \sqrt[3]{\frac{x+y}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y}}} = \frac{3}{2}.$$

Tương tự

$$\frac{y+z}{8} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} \geq \frac{3}{2},$$

$$\frac{z+x}{8} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} \geq \frac{3}{2}.$$

Cộng theo vế ta có

$$\frac{x+y+z}{4} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} \right) \geq \frac{9}{2}.$$

Do đó

$$\frac{x+y+z}{8} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} \geq \frac{9}{4}.$$

Biến đổi

$$\begin{aligned}
& 4(x+y+z) + \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} \\
&= \frac{31(x+y+z)}{8} + \frac{x+y+z}{8} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} \\
&\geq \frac{31.6}{8} + \frac{9}{4} = \frac{51}{2}.
\end{aligned}$$

Nên $\sqrt{17}.S \geq \frac{51}{2} \Leftrightarrow S \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}$.

2.3. Kỹ thuật sử dụng tiếp tuyến

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm

$M(x_0, y_0) \in (C)$ là

$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Nếu

$y = f(x)$ là hàm số lồi thì tồn tại một khoảng $(a; b)$ sao cho

$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \forall x \in (a; b)$

và nếu $y = f(x)$ là hàm số lõm thì tồn tại một khoảng $(a; b)$ sao cho

$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \forall x \in (a; b)$.

Ví dụ 7. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 5(a^2 + b^2 + c^2) - 6.$$

Giải. Dự đoán dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Ta viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = 3x^3 - 5x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$. Ta có $f'(1) = -1$, $f(1) = -2$, tiếp tuyến là $y = -(x - 1) - 2 = -x - 1$. Ta sẽ

chứng minh

$$3x^3 - 5x^2 \geq -x - 1, \forall x \geq 0, \text{ thật vậy}$$

$$3x^3 - 5x^2 \geq -x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(3x + 1) \geq 0$$

bất đẳng thức này đúng với mọi $x \geq 0$.

Như vậy, ta có, với $a, b, c \geq 0$ thì

$$3a^3 \geq 5a^2 - a - 1, \quad 3b^3 \geq 5b^2 - b - 1,$$

$$3c^3 \geq 5c^2 - c - 1, \text{ cộng theo vế ba bất}$$

đẳng thức ta có

$$3(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$\geq 5(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) - 3$$

$$= 5(a^2 + b^2 + c^2) - 6.$$

Vậy,

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 5(a^2 + b^2 + c^2) - 6.$$

Ví dụ 8. Cho $a, b, c \geq -4$ thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Chứng minh

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1.$$

Giải. Dự đoán dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Ta viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ tại điểm có hoành độ

$$x_0 = 1. \quad f'(1) = \frac{1}{9}, f(1) = \frac{1}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến là

$$y = \frac{1}{9}(x - 1) + \frac{1}{3} = \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng với $x \geq -4$ thì

$$\frac{x}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}.$$

Thật vậy, ta biến đổi

$$\frac{x}{x^2+2} \leq \frac{1}{9}x + \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{-(x+4)(x-1)^2}{9(x^2+2)} \leq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng với $x \geq -4$.

Như vậy, với $a, b, c \geq -4$ thì

$$\frac{a}{a^2+2} \leq \frac{1}{9}a + \frac{2}{9}; \frac{b}{b^2+2} \leq \frac{1}{9}b + \frac{2}{9};$$

$$\frac{c}{c^2+2} \leq \frac{1}{9}c + \frac{2}{9}.$$

Cộng ba bất đẳng thức này ta có

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq \frac{1}{9}(a+b+c) + \frac{6}{9} \leq \frac{1}{9}.3 + \frac{6}{9} = 1.$$

Ví dụ 9. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{8}{3} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right). \quad (1)$$

Giải. Do bất đẳng thức cần chứng minh là thuần nhất với các ẩn a, b, c nên ta có thể giả thiết thêm $a+b+c=1$. Dự đoán dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 3 \geq \frac{8}{3} \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \right). \quad (2)$$

Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên

$$1 = a+b+c > 2a \Rightarrow a < \frac{1}{2}, \text{ tương tự ta cũng có } b, c < \frac{1}{2}.$$

Ta viết phương trình tiếp tuyến của hàm

$$f(x) = \frac{8}{3(1-x)} - \frac{1}{x} \text{ tại điểm } x_0 = \frac{1}{3}.$$

$f'(\frac{1}{3}) = 15, f(\frac{1}{3}) = 1$. Phương trình tiếp tuyến là

$$y = 15(x - \frac{1}{3}) + 1 = 15x - 4. \quad \text{Thực}$$

hiện biến đổi biểu thức

$$\frac{8}{3(1-x)} - \frac{1}{x} - (15x - 4) = \frac{(5x-3)(3x-1)^2}{3x(1-x)}.$$

Như vậy, với $0 < x < \frac{1}{2}$ thì

$$\frac{(5x-3)(3x-1)^2}{3x(1-x)} \leq 0. \text{ Do đó, với}$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ thì } \frac{8}{3(1-x)} - \frac{1}{x} \leq 15x - 4.$$

Áp dụng với các ẩn a, b, c ta có

$$\frac{8}{3(1-a)} - \frac{1}{a} \leq 15a - 4;$$

$$\frac{8}{3(1-b)} - \frac{1}{b} \leq 15b - 4;$$

$$\frac{8}{3(1-c)} - \frac{1}{c} \leq 15c - 4. \text{ Cộng các bất}$$

đẳng thức trên ta có

$$\frac{8}{3} \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \right) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 15(a+b+c) - 12.$$

Hay

$$\frac{8}{3} \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \right) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 3,$$

bất đẳng thức (2) được chứng minh.

3. KẾT LUẬN

Bài báo này mong muốn góp phần làm cho việc học và hiểu bất đẳng thức trở nên dễ dàng hơn đối với mọi người, từ học sinh đến giáo viên. Từ đó, thúc đẩy sự phát triển của kiến thức toán học trong cộng đồng học thuật và giáo dục. Chúng tôi hy vọng rằng, bất đẳng thức sẽ không còn là nỗi ám ảnh mà trở thành một phần của hành trình khám phá và hiểu biết toán học của mọi người. Với việc giới thiệu ba kỹ thuật giải bất đẳng thức: bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân, bất đẳng thức Bunhiacopxki và kỹ thuật dùng tiếp tuyến đã mang lại cho độc giả sự hiểu biết sâu hơn về chủ đề này. Chúng tôi cũng hy vọng rằng, thông qua các

ví dụ và phân tích, độc giả đã thu được những kỹ năng và kiến thức cần thiết để áp dụng vào các bài toán thực tế và tăng cường khả năng giải quyết vấn đề của mình trong lĩnh vực này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Hà Huy Khoái (Tổng chủ biên) (2022), Bộ sách giáo khoa kết nối tri thức lớp 10, 11, NXB Giáo dục.
- [2] Phạm Kim Hùng (2006), Sáng tạo bất đẳng thức, NXB Hà Nội.
- [3] Trần Phương (2009), Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học, NXB Trẻ.

Liên hệ:

ThS. Nguyễn Kế Tam

Khoa Giáo dục Tiểu học - Mầm non, Trường Đại học Quảng Bình.

Địa chỉ: 18 Nguyễn Văn Linh, Đồng Hới, Quảng Bình

Email: ketamdhqb@gmail.com

Ngày nhận bài: 18/3/2024

Ngày gửi phản biện: 20/3/2024

Ngày duyệt đăng: 20/7/2024