

h -FOURIER COSINE CONVOLUTION ON TIME SCALE

TÍCH CHẬP h -FOURIER COSINE TRÊN THANG THỜI GIAN

Nguyễn Thị Hồng Phượng
Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

ABSTRACT: In this article, we introduce the h -Fourier cosine convolution on time scale $h\mathbb{N}$, estimate the norm in $\ell_1(h\mathbb{N})$, prove the factorization equality and application in solving integral equations of Toeplitz plus Hankel type in closed-form as well as study the boundedness of this class of equations.

Keywords: Fourier cosine tranform, integral equation, Toeplitz-Hankel.

TÓM TẮT: Trong bài báo này, chúng tôi trình bày về tích chập h -Fourier cosine trên thang thời gian $h\mathbb{N}$, ước lượng chuẩn trong không gian $\ell_1(h\mathbb{N})$, chứng minh đẳng thức nhân tử hóa và ứng dụng vào giải đồng phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel và nghiên cứu tính bị chặn nghiệm cho các lớp phương trình này.

Từ khóa: Biến đổi tích phân, biến đổi Fourier cosine, phương trình tích phân, Toeplitz-Hankel.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phép biến đổi tích phân có nhiều ứng dụng trong Toán học cũng như các lĩnh vực khoa học, kỹ thuật. Các phép biến đổi tích phân xuất hiện từ rất sớm khi Fourier nghiên cứu về quá trình truyền nhiệt. Từ đó đến nay, lý thuyết về các phép biến đổi tích phân không ngừng phát triển. Đến đầu thế kỷ 20, một hướng phát triển mới của lý thuyết các phép biến đổi tích phân đó là tích chập của các phép biến đổi tích phân. Tích chập đã trở thành công cụ hữu hiệu và hấp dẫn để nghiên cứu các bài toán liên quan đến phương trình vi-tích phân, phương trình vi phân đạo hàm riêng. Phép biến đổi Fourier [10] của hàm số f trên $\square$ được cho bởi công thức

$$F\{f\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \omega \in \mathbb{R}$$

và phép biến đổi ngược của nó là

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F\{f\}(\omega)e^{i\omega x} d\omega.$$

Tích chập của hai hàm f, g đối với phép biến đổi Fourier [10] được định nghĩa là

$$(f *_F g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy, x \in \mathbb{R}.$$

Phép toán tích chập này thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa

$$F(f *_F g)(\omega) = F\{f\}(\omega)F\{g\}(\omega), \omega \in \mathbb{R}.$$

Trong trường hợp hàm f là hàm chẵn, ta nhận được phép biến đổi Fourier cosine như sau

$$F_c\{f\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx, \omega \in \mathbb{R}_+$$

và công thức biến đổi ngược là

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c\{f\}(\omega) \cos(\omega x) d\omega.$$

Tích chập Fourier cosine ([8], [10]) của hai hàm f và g được định nghĩa bằng biểu thức

$$(f *_F g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(y)(g(|x-y|) + g(x+y))dy, \quad x > 0.$$

Tích chập Fourier cosine thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa

$$F_c(f *_{F_c} g)(\omega) = F_c\{f\}(\omega)F_c\{g\}(\omega), \quad \omega > 0.$$

Khoảng những năm 90 của thế kỉ XX, Yabukovich S.B đã đề cập đến một số tích chập suy rộng đối với phép biến đổi tích phân Mellin, Kontorovich-Lebedev và các phép biến đổi theo chỉ số. Năm 1998, Kakichev V. A và Nguyễn Xuân Thảo đã đưa ra phương pháp kiến thiết để xác định tích chập suy rộng với hàm trọng đối với 3 phép biến đổi tích phân. Đó được coi như bước ngoặt mở ra hướng nghiên cứu triển vọng về các phép biến đổi tích phân trên không gian các hàm khả tích về sau. Phép biến đổi tích phân của tích chập suy rộng được nghiên cứu bởi các tác giả Vũ Kim Tuấn, Nguyễn Xuân Thảo, Trịnh Tuấn,... Các kết quả có thể kể đến như tích chập suy rộng đối với phép biến đổi I [2], tích chập suy rộng đối với các phép biến đổi tích phân Fourier cosine, Fourier sine ([1], [4], [6], [9], [12]), phép biến đổi Hartley ([11]), phép biến đổi Kontorovich-Lebedev ([12]). Nhờ có công cụ tích chập, một số lớp phương trình Toeplitz-Hankel có thể giải được và cho nghiệm dưới dạng đóng.

Lý thuyết về các phép biến đổi tích phân và tích chập trên không gian các hàm liên tục có nhiều kết quả đặc sắc, phong phú.

Thang thời gian xuất hiện lần đầu năm 1988, trong luận án tiến sĩ của S. Hilger, nhằm hướng đến sự thống nhất giữa tính liên tục và rời rạc. Theo S. Hilger, thang thời gian là một tập hợp con đóng, khác rỗng của tập hợp số thực $\mathbb{R}$. Ví dụ $\mathbb{R}, \mathbb{N}, h\mathbb{N}, h\mathbb{Z}, \dots$ với h là số thực dương cho trước bất kỳ. Với $h\mathbb{N} = \{0, h, 2h, \dots\}$ và $h\mathbb{Z} = \{0, \pm h, \pm 2h, \dots\}$.

Biến đổi Fourier trên thang thời gian $\mathbb{T}$ của hàm $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ liên tục và có giá compact đã được Hilger [7] định nghĩa như sau

$$F\{f\}(\omega) = \int_{t \in \mathbb{T}} f(t) e_{i\omega}(t) \Delta t, \quad \omega \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$$

Và biến đổi ngược của phép biến đổi này có dạng

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} F\{f\}(\omega) e_{\theta(i\omega)}(t) d\omega.$$

Khi $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, biến đổi Fourier trên thang thời gian $h\mathbb{Z}$ được viết lại dưới dạng sau

$$F\{f\}(\omega) = \int_{t \in h\mathbb{Z}} f(t) e^{-i\omega t} \Delta t = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh) e^{-i\omega nh}$$

và phép biến đổi ngược là

$$f(t) = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} F\{f\}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in h\mathbb{Z}.$$

Các công trình tiếp theo được nghiên cứu về thang thời gian tập trung vào nghiên cứu các hệ động lực học liên tục và rời rạc. Tuy nhiên tài liệu về phép biến đổi tích phân trên thang thời gian thì không có nhiều. Trong [5], các tác giả đã xây dựng biểu thức của tích chập Fourier trên thang thời gian rời rạc. Từ đây, với thang thời gian $h\mathbb{Z}$, tích chập Fourier của hai hàm $f, g: h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ có biểu thức dạng

$$(f * g)(t) = h \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mh) g(t - mh), \quad t \in h\mathbb{Z}.$$

Trên cơ sở đó, chúng tôi xây dựng phép biến đổi h -Fourier cosine trên thang thời gian có biểu thức là

$$F_c\{f\}(\omega) = h \left(f(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \cos(\omega nh) \right), \quad \omega \in \left[0, \frac{\pi}{h}\right] \quad (1.1)$$

với điều kiện chuỗi trong công thức (1.1) hội tụ. Biến đổi ngược của biến đổi này là

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{h}} F_c\{f\}(\omega) \cos(\omega t) d\omega, t \in h\mathbb{N}.$$

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng tích chập h -Fourier cosine trên thang thời gian, chứng minh được đẳng thức nhân tử hóa, có ước lượng của tích chập trong không gian $\ell_1(h\mathbb{N})$, đồng thời ứng dụng kết quả đạt được vào giải phương trình Toeplitz-Hankel với trường hợp nhân đặc biệt và nhân tổng quát, giải đóng phương trình đó - nghiệm dưới dạng tích chập và đánh giá tính bị chặn của nghiệm trong không gian $\ell_1(h\mathbb{N})$.

Không gian hàm sử dụng trong bài báo

$$\begin{aligned} \ell_1(h\mathbb{N}) &= \{f: h\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, |f(0)| + \\ &2 \sum_{n=1}^{\infty} |f(nh)| < \infty\} \text{ với chuẩn} \\ \|f\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} &= h(|f(0)| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f(nh)|). \end{aligned}$$

2. TÍCH CHẬP h -FOURIER COSINE TRÊN THANG THỜI GIAN

2.1. Định nghĩa 2.1. Tích chập h -Fourier cosine của hai hàm được cho bởi công thức như sau

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= h \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) (g(|t - mh|) \\ &+ g(t + mh)) + hf(0)g(t), t \in h\mathbb{N}, h > 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

với điều kiện chuỗi ở vế phải của biểu thức (2.1) hội tụ.

2.2. Định lý 2.1. Nếu $f, g \in \ell_1(h\mathbb{N})$, thì tích chập h -Fourier cosine $f * g \in \ell_1(h\mathbb{N})$ và bất đẳng thức sau đây thỏa mãn

$$\|f * g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} \leq \|f\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} \|g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})}. \quad (2.2)$$

Hơn nữa, tích chập này còn thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa

$$\begin{aligned} F_c\{(f * g)\}(\omega) &= F_c\{f\}(\omega) F_c\{g\}(\omega), \\ \omega &\in [0, \frac{\pi}{h}], h > 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ở đó $F_c\{.\}$ được định nghĩa như công thức (1.1), tích chập $(.*)$ được cho bởi công thức (2.1).

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} &= h|(f * g)(0)| \\ &+ 2h \sum_{n=1}^{\infty} |(f * g)(nh)| \leq h^2 |f(0)g(0)| \\ &+ 2h^2 \sum_{m=1}^{\infty} |f(mh)g(mh)| \\ &+ 2h^2 |f(0)| \sum_{n=1}^{\infty} |g(nh)| \\ &+ 2h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |f(mh)g(nh + mh)| \\ &+ 2h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |f(mh)g(|nh - mh|)|. \end{aligned}$$

Trong số hạng $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |f(mh)g(nh + mh)|$,

đặt $r = n + m$, ta có

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |f(mh)g(nh + mh)| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=m+1}^{\infty} |f(mh)g(rh)|. \end{aligned}$$

Tương tự, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |f(mh)g(|nh - mh|)|$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} + \sum_{r=0}^{m-1} \right) |f(mh)g(rh)|.$$

Vì thế ta nhận được

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} &\leq h^2 |f(0)g(0)| + \\ &+ 2h^2 \sum_{m=1}^{\infty} |f(mh)g(mh)| + \\ &+ 2h^2 |f(0)| \sum_{m=1}^{\infty} |g(mh)| + \\ &+ 2h^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=m+1}^{\infty} |f(mh)g(rh)| + \\ &+ 2h^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} + \sum_{r=0}^{m-1} \right) |f(mh)g(rh)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq h^2 \left(|f(0)| + 2 \sum_{m=1}^{\infty} |f(mh)| \right) \\
&\quad \left(|g(0)| + 2 \sum_{m=1}^{\infty} |g(mh)| \right) \\
&= \|f\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} \|g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} < \infty. \\
\text{Vậy } (f * g) &\in \ell_1(h\mathbb{N}) \text{ và (2.2) thỏa mãn.} \\
\text{Tiếp theo, theo Định nghĩa 2.1, ta có} \\
F_c\{(f * g)\}(\omega) &= 2h \sum_{n=1}^{\infty} (f * g)(nh) \cos(\omega nh) + \\
&+ h(f * g)(0) \\
&= 2h^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) (g(mh + nh) + g(|mh - nh|)) \cos(\omega nh) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) g(mh) + \right. \\
&\quad \left. + f(0) \sum_{m=1}^{\infty} g(mh) \cos(\omega mh) \right\} + h^2 f(0) g(0), \\
\omega &\in [0, \frac{\pi}{h}], \quad h > 0. \text{ Mặt khác, ta thấy} \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) (g(mh + nh) \\
&\quad + g(|mh - nh|)) \cos(\omega nh) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) g(mh + nh) \cos(\omega nh) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) g(|mh - nh|) \cos(\omega nh) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) \sum_{t=m+1}^{\infty} g(th) \cos((t - m)h\omega) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) \sum_{t=1-m}^{\infty} g(|t|h) \cos((t + m)h\omega) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) \sum_{t=m+1}^{\infty} g(th) \cos((t - m)h\omega) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) \sum_{t=1-m}^{-1} g(|t|h) \cos((t + m)h\omega) \\
&\quad + g(0) \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) \cos(mh\omega) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) \sum_{t=1}^{\infty} g(|t|h) \cos((t + m)h\omega) \\
&= \frac{1}{2h^2} (F_c\{f\}(\omega) - hf(0)) (F_c\{g\}(\omega) - hg(0)) - \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) g(nh)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2h} g(0) (F_c\{f\}(\omega) - hf(0)).$$

$$\text{Thay } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) (g(mh + nh) +$$

$g(|mh - nh|)) \cos(\omega nh)$ vào biểu thức của $F_c\{f * g\}(\omega)$ ta nhận được đẳng thức nhân tử hóa (2.3).

3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN KIỂU TOEPLITZ-HANKEL

Trong phần này, chúng tôi sử dụng kết quả đạt được ở mục trên để nghiên cứu tính giải được của phương trình Toeplitz-Hankel trong hai trường hợp đặc biệt, trường hợp nhân $k_1 = k_2$ và trường hợp nhân k_1, k_2 tổng quát trên thang thời gian $h\mathbb{N}$. Chúng tôi đã đưa ra công thức nghiệm dạng tường minh, chỉ ra không gian nghiệm và tính bị chặn nghiệm của phương trình này trên không gian nghiệm.

Trước hết, chúng tôi nhắc lại định lý Wiener-Levy [3] “Giả sử f là biến đổi Fourier của một hàm thuộc $L_1(\mathbb{R})$, φ là hàm giải tích trong một lân cận của gốc, chứa miền $\{f(y), \forall y \in \mathbb{R}\}$ và thỏa mãn $\varphi(0) = 0$, khi đó $\varphi(f)$ cũng là ảnh qua phép biến đổi Fourier của một hàm thuộc $L_1(\mathbb{R})$ ”.

Kết quả này vẫn còn đúng đối với biến đổi h -Fourier cosine trên thang thời gian $h\mathbb{N}$ với h là số thực dương cho trước tùy ý.

3.1. Phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel với nhân $k_1 = k_2$

Xét phương trình

$$f(nh) + h \sum_{m=1}^{\infty} f(mh) (k(mh + nh) + k(|mh - nh|)) + hf(0)k(nh) = g(nh), n \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

với $k, g \in \ell_1(h\mathbb{N})$ với các hàm cho trước, f là ẩn hàm, h là số thực dương cho trước

Định lý 3.1. Giả sử rằng k, g là các hàm

cho trước thuộc không gian $\ell_1(h\mathbb{N})$ và thỏa mãn điều kiện $1 + F_c\{k\}(\omega) \neq 0$ với mọi $\omega \in [0, \frac{\pi}{h}]$. Khi đó phương trình (3.1) có nghiệm duy nhất thuộc $\ell_1(h\mathbb{N})$ và được cho bởi

$$f(t) = g(t) - (g * u)(t), t \in h\mathbb{N}, h > 0.$$

Hơn nữa, ta nhận được ước lượng sau đây

$$\|f\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} \leq \|g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})}(1 + \|u\|_{\ell_1(h\mathbb{N})}).$$

Trong đó, tích chập $(*)$ được xác định bởi công thức (2.1), u là hàm thuộc $\ell_1(h\mathbb{N})$ và được xác định bởi

$$F_c\{u\}(\omega) = \frac{F_c\{k\}(\omega)}{1 + F_c\{k\}(\omega)}, \omega \in [0, \frac{\pi}{h}].$$

Tác động biến đổi h -Fourier cosine trên $h\mathbb{N}$ vào cả hai vế của phương trình (3.1) và sử dụng đẳng thức nhân tử hóa (2.3), ta được $F_c\{f\}(\omega) + F_c\{f\}(\omega)F_c\{k\}(\omega) = F_c\{g\}(\omega)$ với $\forall \omega \in [0, \frac{\pi}{h}]$. Từ đó

$$F_c\{f\}(\omega) = \left(1 - \frac{F_c\{k\}(\omega)}{1 + F_c\{k\}(\omega)}\right), \omega \in [0, \frac{\pi}{h}].$$

Do $1 + F_c\{k\}(\omega) \neq 0$ với mọi $\omega \in [0, \frac{\pi}{h}]$ nên theo Định lý kiểu Wiener-Levy trên thang thời gian đối với phép biến đổi h -Fourier cosine, tồn tại duy nhất hàm $u \in \ell_1(h\mathbb{N})$ sao cho

$$F_c\{u\}(\omega) = \frac{F_c\{k\}(\omega)}{1 + F_c\{k\}(\omega)}, \omega \in [0, \frac{\pi}{h}].$$

Tiếp theo, áp dụng đẳng thức nhân tử hóa (2.3), ta viết lại $F_c\{f\}(\omega)$ ở trên như sau

$$\begin{aligned} F_c\{f\}(\omega) &= \left(1 - \frac{F_c\{k\}(\omega)}{1 + F_c\{k\}(\omega)}\right) F_c\{g\}(\omega) \\ &= (1 - F_c\{u\}(\omega)) F_c\{g\}(\omega) \\ &= F_c\{g\}(\omega) - F_c\{g * u\}(\omega), \\ \omega &\in [0, \frac{\pi}{h}]. \end{aligned}$$

Do đó $f(t) = g(t) - (g * u)(t), t \in h\mathbb{N}$.

Từ đó, ta có $\|f\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} = \|g - g * u\|_{\ell_1(h\mathbb{N})}$

$$\leq \|g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})}(1 + \|u\|_{\ell_1(h\mathbb{N})}), \forall u, g \in \ell_1(h\mathbb{N}), h > 0.$$

3.2. Phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel với nhân tùy ý

Xét phương trình

$$f(nh) + h \sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}(mh)(k_1(mh + nh) + k_2(|mh - nh|)) = g(nh), n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

$$\text{với } \bar{f}(0) = \frac{f(0)}{2}, \bar{f}(nh) = f(nh), \forall n \geq 1,$$

các hàm $k, g \in \ell_1(h\mathbb{N})$ cho trước, f là ẩn hàm, h là số thực dương cho trước.

Định lý 3.2. Giả sử rằng k, g là các hàm cho trước thuộc không gian $\ell_1(h\mathbb{N})$ và thỏa mãn điều kiện $1 + F_c\{\frac{k_1+k_2}{2}\}(\omega) \neq 0$ với mọi $\omega \in [0, \frac{\pi}{h}]$. Khi đó phương trình (3.2) có nghiệm duy nhất thuộc $\ell_1(h\mathbb{N})$ và được cho bởi

$$f(t) = g(t) - (g * u)(t), t \in h\mathbb{N}, h > 0.$$

Hơn nữa, ta nhận được ước lượng sau đây

$$\|f\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} \leq \|g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})}(1 + \|u\|_{\ell_1(h\mathbb{N})}).$$

Trong đó, tích chập $(*)$ được xác định bởi công thức (2.1), u là hàm thuộc $\ell_1(h\mathbb{N})$ và được xác định bởi

$$F_c\{u\}(\omega) = \frac{F_c\{\frac{k_1+k_2}{2}\}(\omega)}{1 + F_c\{\frac{k_1+k_2}{2}\}(\omega)}, \omega \in [0, \frac{\pi}{h}].$$

Chứng minh. Trước hết ta nhận thấy

$$\begin{aligned} &h \sum_{m=0}^{\infty} \bar{f}(mh)(k_1(mh + nh) + k_2(|mh - nh|)) \\ &= (f * g)(nh), \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Phương trình (3.2) có thể viết lại dưới dạng

$$f(nh) + M + N - P = g(nh), n \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

với

$$M = h \sum_{m=0}^{\infty} \bar{f}(mh)(k_1(mh + nh) + k_1(|mh - nh|)),$$

$$N = h \sum_{m=0}^{\infty} \bar{f}(mh) (k_2(mh+nh) + k_2(|mh-nh|)),$$

$$P = h \sum_{m=0}^{\infty} \bar{f}(mh) (k_1(|mh-nh|) + k_2(mh+nh)).$$

Mở rộng phương trình (3.2) trên $h\mathbb{Z}$, ta được

$$f(|-nh|) + h \sum_{m=0}^{\infty} \bar{f}(mh) (k_1(|mh-nh|) - k_2(mh+nh)) = g(-nh).$$

Từ (3.2) và (3.3), ta có

$$f(nh) + f(-nh) + A + B = g(nh) + g(-nh) \quad (3.4)$$

Do $f(nh) + f(-nh)$ và $f(nh) + f(-nh)$ là các hàm chẵn trên $h\mathbb{Z}$, áp dụng biến đổi Fourier trên $h\mathbb{Z}$ với hai vế của phương trình (3.4) và áp dụng đẳng thức nhân tử hóa (2.3) ta được

$$\begin{aligned} 2F_c\{f\}(\omega) + F_c\{f\}(\omega)F_c\{k_1 + k_2\}(\omega) \\ = 2F_c\{g\}(\omega), \omega \in [0, \frac{\pi}{h}], h > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{nên } F_c\{f\}(\omega) \left(1 + F_c\left\{ \frac{k_1 + k_2}{2} \right\}(\omega) \right) \\ = F_c\{g\}(\omega), \omega \in [0, \frac{\pi}{h}]. \end{aligned}$$

Điều đó cho ta biểu diễn sau $F_c\{f\}(\omega)$

$$= F_c\{g\}(\omega) \left(1 - \frac{F_c\left\{ \frac{k_1 + k_2}{2} \right\}(\omega)}{1 + F_c\left\{ \frac{k_1 + k_2}{2} \right\}(\omega)} \right),$$

$$\omega \in [0, \frac{\pi}{h}].$$

Do giả thiết của Định lý 3.2 nên tồn tại duy nhất hàm $u \in \ell_1(h\mathbb{N})$ để

$$F_c\{u\}(\omega) = \frac{F_c\left\{ \frac{k_1 + k_2}{2} \right\}(\omega)}{1 + F_c\left\{ \frac{k_1 + k_2}{2} \right\}(\omega)}, \omega \in [0, \frac{\pi}{h}].$$

Vậy $f(t) = g(t) - (g * u)(t), t \in h\mathbb{N}$.

Từ kết quả của Định lý 2.2, ta có $g * u \in \ell_1(h\mathbb{N})$ và có đánh giá sau

$$\begin{aligned} \|f\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} &\leq \|g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} + \|g * u\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} \\ &\leq \|g\|_{\ell_1(h\mathbb{N})} (1 + \|u\|_{\ell_1(h\mathbb{N})}). \end{aligned}$$

Trong các nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi xem xét một số tích chập suy rộng với hàm trọng trên không gian hàm $\ell_p(h\mathbb{N}), p = 1, 2, \dots$ và h là số thực dương cho trước cũng như ứng dụng vào giải một số phương trình Toeplitz-Hankel và phương trình vi-tích phân khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt:

- [1] Nguyễn Xuân Thảo, *Phép biến đổi tích phân, tích chập và ứng dụng*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2015.
- [2] Trịnh Tuân, Hàm dạng I với nhiều đối số ma trận và tích chập suy rộng của phép biến đổi I, *Luận án Tiến sĩ Toán học*, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội (2009)

Tiếng Anh:

- [3] Naimark. M. A., *Normed Algebras*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (1972).
- [4] Nguyen Xuan Thao, Virchenko N. A, On the generalized convolution for, *csFF* and K-L integral transforms, *Ukrai. Math. J.* V.64, N.1, pp81-91
- [5] R.J. Marks, Ian A. Gravgne, John M. Davis, A generalized Fourier transform and convolution on time scale, *J. Math. Anal. Appl.* 340 (2008), 901-919.
- [6] Saitoh, Weighted L_p -norm inequalities in convolutions, *Survey on Classical Inequalities, Mathematics and its Applications*, vol. 517, pp. 225-234, Springer, New York (2000).
- [7] S. Hilger, Special functions, Laplace and Fourier transform on measure chains, *Dynam. Systems Appl.* 8 (1999) 471-488.

- [8] Sneddon.I. N (1972), *The Use of Integral Transforms*, MacGray-Hill, New York.
- [9] S. Saitoh, V. K. Tuan, and M Yamamoto, Reverse convolution inequalities and applications to inverse heat source problems, *J. Inequal. Pure. Appl. Math.* 3 (2002), no. 5, Art. 80
- [10] Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford Univ Press, 1937.
- [11] T. Tuan, Operational Properties of the Hartley Convolutions and Its Applications, *Mediterr. J. Math.*(2022) 19:266
- [12] T. Tuan, On the Fourier sine and Kontorovich-Lebedev generalized convolution transform and applications, *Ukrain. Mat. Zh.* 72(2020), no. 2, 2667-279

Liên hệ:

Nguyễn Thị Hồng Phượng

Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Địa chỉ: 136 Xuân Thủy, Cầu Giấy, Hà Nội

Email: phuongnth@hnue.edu.vn

Ngày nhận bài: 05/3/2023

Ngày gửi phản biện: 07/3/2023

Ngày duyệt đăng: 18/5/2023