

THE REGULARITY INDEX OF SIX ALMOST EQUIMULTIPLE POINTS IN PROJECTIVE SPACE P^3

CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA TẬP SÁU ĐIỂM HẦU ĐỒNG BỘI TRONG KHÔNG GIAN XẠ ẢNH P^3

Trần Nam Sinh, Phan Quang Như Anh
 Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng
Phạm Ngọc Hoàng
 Trường Đại học Quảng Nam

ABSTRACT: In this paper, we compute the regularity index of the set of six almost equimultiple points in projective space P^3 and presented through Theorem 3.4.

Key word: The regularity index, fat points, projective space, scheme, Hilbert function.

TÓM TẮT: Trong bài báo này, chúng tôi tính chỉ số chính quy của một tập 6 điểm hầu đồng bội trong không gian xạ ảnh P^3 và được trình bày qua Định lý 3.4.

Từ khóa: Chỉ số chính quy, tập điểm béo, không gian xạ ảnh, lược đồ, hàm Hilbert.

1. GIỚI THIỆU

Cho $P^n := P_k^n$ là một không gian xạ ảnh n -chiều trên trường đóng đại số k và $R = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức $n+1$ biến $x_0, x_1, \dots, x_n$ với hệ số trên k . Cho $P_1, \dots, P_n$ là các điểm phân biệt trong P^n , ký hiệu $\mathcal{O}_i$ là iđêan nguyên tố thuần nhất xác định bởi P_i , $i = 1, \dots, s$. Cho $m_1, \dots, m_s$ là các số nguyên dương, iđêan $I = \mathcal{O}_1^{m_1} \cap \dots \cap \mathcal{O}_s^{m_s}$ gồm các đa thức $f \in R$ triệt tiêu tại P_i với số bội $\geq m_i, i = 1, \dots, s$; ta ký hiệu Z là lược đồ chiều không xác định bởi I và gọi

$$Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$$

là tập điểm béo trong P^n .

Vành tọa độ thuần nhất của Z là $A := R/I$. Đây là vành phân bậc

$A = \bigoplus_{t \geq 0} A_t$ có số bội

$$e(A) := \sum_{i=1}^s \binom{m_i + n - 1}{n}.$$

Với mọi $t \in N$ (N là tập các số tự nhiên), phân phân bậc A_t là một k -không gian véc tơ hữu hạn chiều. Hàm số

$$H_Z(t) = \dim_k A_t$$

được gọi là hàm Hilbert của Z .

Hàm Hilbert tăng chặt cho đến khi đạt được số bội $e(A)$, tại đó nó dừng. Chỉ số chính quy của Z là số nguyên dương bé nhất sao cho $H_Z(t) = e(A)$ và nó được ký hiệu là $\text{reg}(Z)$. Chỉ số chính quy $\text{reg}(Z)$ bằng với chỉ số chính quy Castelnuovo – Mumford $\text{reg}(A)$ của vành tọa độ A .

Việc tính đúng giá trị của $\text{reg}(Z)$ là khó, thay vì vậy người ta tìm chặn trên của nó. Đã có nhiều kết quả về chặn trên

của $reg(Z)$ có thể tìm thấy trong [1], [2], [3], [4], [6], [7].

Cho tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \dots + m_sP_s$ trong P^n , đặt

$$T_j = \max \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^j m_i + j - 2}{j} \right\rfloor \right\}$$

$P_{i_1}, \dots, P_{i_q}$ nằm trên một j -phẳng},

$$T = \max \{T_j \mid j = 1, \dots, n\}.$$

Một tập điểm $X = \{P_1, \dots, P_s\}$ được gọi là không suy biến nếu X không nằm trên một siêu phẳng. Một tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \dots + m_sP_s$ được gọi là không suy biến nếu X không suy biến. Năm 2016, E. Ballico, O. Dumitrescu và Postinghel (xem [1, Theorem 2.1]) đã chứng minh được

$$reg(Z) \leq T,$$

cho tập $Z = m_1P_1 + \dots + m_{n+3}P_{n+3}$

không suy biến trong P^n . Gần đây Nagel và Trok (xem [5, Theorem 5.3]) đã chứng minh được chặn trên đúng cho tập điểm béo tùy ý trong P^n .

Nhắc lại rằng việc tính đúng giá trị của $reg(Z)$ là rất khó. Vì vậy, chỉ có vài kết quả được đăng trên các tạp chí uy tín như sau.

Năm 1984, Davis và Geramita (xem [3, Corollary 2.3]) đã tính được giá trị của $reg(Z)$ khi tập điểm nằm trên một đường thẳng với

$$reg(Z) = m_1 + \dots + m_s - 1.$$

Một đường cong hữu tỷ chuẩn trong P^n là đường cong có phương trình tham số

$$x_0 = t^n, x_1 = t^{n-1}u, \dots, x_{n-1} = tu^{n-1}, x_n = u^n$$

Cho một tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \dots + m_sP_s$ trong P^n , với $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s$. Năm 1993, Catalisano, Trung và Valla đã chỉ ra công thức tính $reg(Z)$ trong hai trường hợp sau (xem [2]):

Nếu $s \geq 2$ và $P_1, \dots, P_s$ nằm trên đường cong hữu tỷ chuẩn trong P^n (xem [2, Proposition 7]), thì

$$reg(Z) = \max \left\{ m_1 + m_2 - 1, \left\lceil \left(\sum_{i=1}^s m_i + n - 2 \right) / n \right\rceil \right\}.$$

Nếu

$$n \geq 3, 2 \leq s \leq n+2, 2 \leq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s$$

và $P_1, \dots, P_s$ nằm ở vị trí tổng quát trong P^n (xem [2, Corollary 8]), thì

$$reg(Z) = m_1 + m_2 - 1.$$

Năm 2012, Thiện (xem [8, Theorem 3.4]) cũng đã tính được chỉ số chính quy

$$reg(Z) = T$$

cho tập $s+2$ điểm béo sao cho chúng không nằm trên một $(s-1)$ -phẳng trong P^n với $s \leq n$. Trong năm 2017, P.V. Thiện và T.N. Sinh (xem [9, Theorem 4.6]) đã tính được chỉ số chính quy

$$reg(Z) = T$$

cho tập $s+3$ điểm béo đồng bội, không nằm trên $(r-1)$ -phẳng, $s \leq r+3$, trong P^n .

Giả thiết $reg(Z) = T$ cho tập điểm béo tùy ý trong P^n không còn đúng, bởi vì U. Nagel và B. Trok (xem [5, Example 5.7]) đã chỉ ra rằng: nếu $Z = mP_1 + \dots + mP_s$ là tập điểm béo trong

P^n , gồm năm điểm ở vị trí tùy ý và $\binom{d+n}{d}$ ở vị trí tổng quát, $d \geq 5$ thì

$$\text{reg}(Z) < T,$$

với d (hoặc n) đủ lớn.

Một tập điểm béo $Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$ được gọi là hầu đồng bội nếu $m_i \in \{m-1, m\}$, với mọi $i = 1, \dots, s$.

Trong bài báo này, chúng tôi đi tính chỉ số chính quy $\text{reg}(Z)$ cho trường hợp 6 điểm hầu đồng bội trong P^3 . Kết quả này là hoàn toàn mới và được nêu trong Định lý 3.4.

2. CÁC BỔ ĐỀ CẦN DÙNG

Trong quá trình chứng minh các kết quả chính, chúng tôi sử dụng các bổ đề sau. Bổ đề sau đây dùng để tính giá trị $\text{reg}(Z)$ khi tập điểm nằm trên một đường thẳng.

Bổ đề 2.1. ([3, Hệ quả 2.3]). Nếu $Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$ là một tập điểm béo tùy ý trong P^n , thì

$$\text{reg}(Z) = m_1 + \dots + m_s - 1$$

khi và chỉ khi các điểm $P_1, \dots, P_s$ nằm trên một đường thẳng.

Cho tập các chỉ số $\{1, \dots, s\}$ và $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, s\}$ là tập chỉ số con của $\{1, \dots, s\}$. Ta gọi $Y = m_{i_1} P_{i_1} + \dots + m_{i_r} P_{i_r}$ là tập điểm béo con của tập $Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$. Bổ đề sau giúp ta so sánh chỉ số chính quy của một tập điểm béo con của tập điểm béo cho trước.

Bổ đề 2.2. (8, Bổ đề 3.3]). Cho $X = \{P_1, \dots, P_s\}$ là các điểm phân biệt

trong P^n và $m_1, \dots, m_s$ là các số nguyên dương. Đặt $I = \wp_1^{m_1} \cap \dots \cap \wp_s^{m_s}$. Nếu

$Y = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_r}\}$ là một tập con của X và

$$J = \wp_{i_1}^{m_{i_1}} \cap \dots \cap \wp_{i_r}^{m_{i_r}} \text{ khi đó}$$

$$\text{reg}(R/J) \leq \text{reg}(R/I).$$

Từ đây suy ra, nếu $Z = m_1 P_1 + \dots + m_s P_s$ là tập điểm béo xác định bởi ideal I và $U = m_{i_1} P_{i_1} + \dots + m_{i_r} P_{i_r}$ là tập điểm béo xác định bởi ideal J , thì ta có

$$\text{reg}(U) \leq \text{reg}(Z).$$

Hai bổ đề tiếp theo cho phép ta tính chỉ số chính quy cho một tập điểm cho trước.

Bổ đề 2.3. ([8, Định lý 3.4]). Cho $P_1, \dots, P_{s+2}$ là các điểm phân biệt không nằm trên $(s-1)$ -phẳng trong P^n , $s \leq n$ và $m_1, \dots, m_s$ là các số nguyên dương. Đặt $I = \wp_1^{m_1} \cap \dots \cap \wp_{s+2}^{m_{s+2}}$, $A = R/I$. Thì,

$$\text{reg}(A) = \max\{T_j \mid j=1, \dots, n\},$$

trong đó

$$T_j = \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right\rceil \mid \right.$$

$P_{i_1}, \dots, P_{i_q}$ nằm trên một j -phẳng,

$$j=1, \dots, n.$$

Bổ đề 2.4. ([10, Định lý 3.1]). Cho $X = \{P_1, \dots, P_{s+3}\}$ là một tập các điểm phân biệt ở vị trí tổng quát trên s -phẳng, không nằm trên $(s-1)$ -phẳng trong P^n , $s \leq n$ và m_i là các số nguyên dương. Đặt $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{s+3} P_{s+3}$ là tập điểm béo. Khi đó,

$$\text{reg}(Z) = \max\{T_j \mid j=1, \dots, n\}$$

trong đó

$$T_j = \max \left\{ \left[\frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right] \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\},$$

$$j=1, \dots, n.$$

Bổ đề sau đây cho ta chặn trên cho tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong P^n .

Bổ đề 2.5. ([1, Định lý 2.1]). Cho $Z = m_1 P_1 + \dots + m_{n+3} P_{n+3}$ là một tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong P^n . Khi đó,

$$\text{reg}(Z) \leq \max \{T_j \mid j=1, \dots, n\}$$

trong đó

$$T_j = \max \left\{ \left[\frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right] \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\},$$

$$j=1, \dots, n.$$

3. CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA TẬP 6 ĐIỂM HẦU ĐỒNG BỘI

Để chứng minh các kết quả của bài báo này, chúng tôi bắt đầu từ nhận xét sau:

Bổ đề 3.1. Cho $X = \{P_1, \dots, P_6\}$ là tập sáu điểm phân biệt không suy biến trong P^3 sao cho không có năm điểm nào của X nằm trên 2-phẳng. Cho $m_1, \dots, m_6$ là số nguyên dương và tập điểm béo

$$Z = m_1 P_1 + \dots + m_6 P_6.$$

Đặt

$$T_j = \max \left\{ \left[\frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right] \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\},$$

và $T = \max \{T_j \mid j=1, 2, 3\}.$

Khi đó, nếu $T=T_1$ hoặc $T=T_2$ thì

$$\text{reg}(Z) = T.$$

Chứng minh. Xét hai trường hợp của T .

• $T=T_1$: Gọi d là đường thẳng đi qua các điểm $P_{i_1}, \dots, P_{i_r}$ sao cho $T_1 = m_{i_1} + \dots + m_{i_r} - 1$. Xét tập điểm béo $Y = m_{i_1} P_{i_1} + \dots + m_{i_r} P_{i_r}$, theo Bổ đề 2.2, ta có

$$\text{reg}(Z) \geq \text{reg}(Y) = T_1 = T.$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 2.5, ta có

$$\text{reg}(Z) \leq T. \text{ Do đó } \text{reg}(Z) = T.$$

• $T=T_2$: Gọi α là 2-phẳng đi qua các điểm $P_{i_1}, \dots, P_{i_s}$ sao cho

$$T_2 = \left\lceil \frac{m_{i_1} + \dots + m_{i_s}}{2} \right\rceil, \text{ do không có năm}$$

điểm của X nằm trên 2-phẳng, nên $s \leq 4$.

Xét tập điểm béo $U = m_{i_1} P_{i_1} + \dots + m_{i_s} P_{i_s}$, theo Bổ đề 2.3 ta có

$\text{reg}(U) = T_2 = T$. Mặt khác theo Bổ đề 2.5, ta có $\text{reg}(U) \leq T$. Do đó $\text{reg}(Z) = T$. Từ đó ta nhận được $\text{reg}(Z) = T$. Bổ đề 3.1 đã được chứng minh.

Mệnh đề 3.2. Cho $X = \{P_1, \dots, P_6\}$ là một tập 6 điểm phân biệt không suy biến sao cho không có năm điểm nằm trên 2-phẳng, m là một số nguyên dương lớn hơn 2. Cho

$$Z = (m-1)P_1 + (m-1)P_2 + mP_3 + \dots + mP_6$$

là một tập sáu điểm hầu đồng bội.

Đặt

$$T_j = \max \left\{ \left[\frac{\sum_{l=1}^q m_{i_l} + j - 2}{j} \right] \mid P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \text{ nằm trên một } j\text{-phẳng} \right\},$$

và $T = \max \{T_j \mid j=1, 2, 3\}$

Khi đó $reg(Z) = T$.

Chứng minh. Do không có năm điểm nào của X nằm trên 2-phẳng nên không có bốn điểm của X nằm trên một đường thẳng.

• Nếu X có ba điểm nằm trên một đường thẳng. Gọi d là đường thẳng đi qua ba điểm của X . Khi đó ta có các khả năng sau:

- d đi qua P_1, P_2 và P_i ($i=3, \dots, 6$) thì $T_1 = 3m - 3$,

- d đi qua P_1 , (hoặc P_2) và P_i, P_j ($i, j=3, \dots, 6$) thì $T_1 = 3m - 2$,

- d đi qua P_i, P_j, P_k ($i, j, k=3, \dots, 6$) thì $T_1 = 3m - 1$.

• Nếu X không có ba điểm nằm trên một đường thẳng. Khi đó $T_1 = 2m - 1$.

Khi đó

$$3m - 1 \geq T_1 \geq 2m - 1.$$

Do không có năm điểm của X nằm trên 2-phẳng nên

$$T_2 \leq \left\lfloor \frac{4m + 2 - 2}{2} \right\rfloor = 2m.$$

Suy ra

$$2m - 1 \leq \max \{T_1, T_2\}.$$

Hơn nữa,

$$T_3 = \left\lfloor \frac{2(m-1) + 4m + 3 - 2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6m-1}{3} \right\rfloor \leq 2m-1,$$

$$\text{do đó: } T = \max \{T_1, T_2\}.$$

Theo Bổ đề 3.1 ta có: $reg(Z) = T$.

Mệnh đề 3.2 đã được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 3.3. Cho $X = \{P_1, \dots, P_6\}$ là tập 6 điểm phân biệt không suy biến,

không ở vị trí tổng quát trong P^3 , m là số nguyên dương lớn hơn 2. Cho

$Z = (m-1)P_1 + (m-1)P_2 + mP_3 + \dots + mP_6$ là tập sáu điểm hầu đồng bội. Đặt

$$T_j = \max \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^q m_i + j - 2}{j} \right\rfloor \mid \right.$$

$P_{i_1}, \dots, P_{i_q}$ nằm trên một j -phẳng $\left. \right\}$,

$$\text{và } T = \max \{T_j \mid j = 1, 2, 3\},$$

khi đó: $reg(Z) = T$.

Chứng minh:

Nếu X không có 5 điểm nằm trên 2-phẳng α , theo Mệnh đề 3.2, ta có

$$reg(Z) = T.$$

Nếu X có 5 điểm nằm trên 2-phẳng α . Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: X có 4 điểm nằm trên một đường thẳng d . Khi đó ta có

$$4m - 3 \leq T_1 \leq 4m - 1,$$

$$\left\lfloor \frac{5m-2}{2} \right\rfloor \leq T_2 \leq \left\lfloor \frac{5m-1}{2} \right\rfloor \text{ và } T_3 \leq 2m-1.$$

Do đó: $T = T_1$.

Gọi $P_{i_1}, \dots, P_{i_4}$ là bốn điểm nằm trên đường thẳng d . Xét tập điểm

$Y = m_{i_1}P_{i_1} + \dots + m_{i_4}P_{i_4}$, theo Bổ đề 2.1, ta có: $reg(Y) = T_1 = T$.

Theo Bổ đề 2.2 ta có: $reg(Z) \geq reg(Y) = T$.

Hơn nữa, theo Bổ đề 2.5, ta có: $reg(Z) \leq T$.

Do đó: $reg(Z) = T$.

Trường hợp 2: X có ba điểm nằm trên một đường thẳng d . Ta có 2-phẳng α luôn chứa d . Khi đó

• Nếu d đi qua P_1, P_2 . Khi đó

$$3m-3 \leq T_1 \leq 3m-1, \quad T_2 = \left\lceil \frac{5m-2}{2} \right\rceil$$

và $T_3 \leq 2m-1$.

$$\text{Ta có: } 3m-3 - \frac{5m-2}{2} = \frac{m-4}{2}.$$

Do đó, với $m \geq 4$ thì

$$3m-3 \geq \left\lceil \frac{5m-2}{2} \right\rceil = T_2.$$

Với $m = 3$ thì $T_1 = 6$ và

$$T_2 = \left\lceil \frac{5 \cdot 3 - 2}{2} \right\rceil = 6.$$

Vậy $T_1 \geq T_2$.

• Nếu d đi qua P_1 hoặc P_2 . Khi đó

$$3m-2 \leq T_1 \leq 3m-1, \quad T_2 \leq \left\lceil \frac{5m-1}{2} \right\rceil$$

và

$$T_3 \leq 2m-1.$$

$$\text{Ta có: } 3m-2 - \frac{5m-1}{2} = \frac{m-3}{2}.$$

Do đó, với $m \geq 3$ thì $T_1 \geq T_2$.

• Nếu d đi qua không đi qua P_1 và

P_2 . Khi đó $T_1 = 3m-1, T_2 = \left\lceil \frac{5m-1}{2} \right\rceil$, suy ra $T_1 \geq T_2$.

Hơn nữa, ta luôn có $T_1 \geq T_3$.

Do đó: $T = T_1$.

Gọi $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}$ là ba điểm thuộc đường thẳng d sao cho $T_1 = m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3}$.

Xét tập điểm béo $U = m_{i_1} P_{i_1} + m_{i_2} P_{i_2} + m_{i_3} P_{i_3}$. Theo Bổ đề 2.1 ta có $\text{reg}(U) = T_1 = T$.

Theo Bổ đề 2.2, ta có $\text{reg}(Z) \geq \text{reg}(U) = T_1 = T$.

Hơn nữa, theo Bổ đề 2.5 ta có $\text{reg}(Z) \leq T$.

Do đó: $\text{reg}(Z) = T$.

Mệnh đề 3.3 được chứng minh. $\square$

Định lý 3.4. Cho $X = \{P_1, \dots, P_6\}$

là tập 6 điểm phân biệt không suy biến, không trong P^3 , m là số nguyên dương lớn hơn 2. Cho

$$Z = (m-1)P_1 + (m-1)P_2 + mP_3 + \dots + mP_6$$

là tập sáu điểm hậu đồng bội. Đặt

$$T_j = \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^q m_{i_j} + j - 2}{j} \right\rceil \mid \right.$$

$P_{i_1}, \dots, P_{i_q}$ nằm trên một j -phẳng $\left. \right\}$,

và $T = \max \{T_j \mid j = 1, 2, 3\}$,

khi đó: $\text{reg}(Z) = T$.

Chứng minh.

Trường hợp 1: Nếu X ở vị trí tổng quát trong P^3 , theo Bổ đề 2.4 ta có:

$$\text{reg}(Z) = T.$$

Trường hợp 2: Nếu X không nằm ở vị trí tổng quát.

• X không có 5 điểm nằm trên 2-phẳng. Theo Mệnh đề 3.2 ta có: $\text{reg}(Z) = T$.

• X có 5 điểm nằm trên 2-phẳng. Theo Mệnh đề 3.3 ta có: $\text{reg}(Z) = T$.

Định lý 3.4 đã được chứng minh. $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ballico E., Dumitrescu O. and Postighel E. (2016), On Segre's bound for fat points in P^n , *J. Pure and Appl. Algebra* **220**, Issue, 2307-2323.
- [2] Catalisano M.V., Trung N.V. and Valla G. (1993), A sharp bound for the regularity index of fat points in general position, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118**, 717-724.
- [3] Davis E.D. and Geramita A.V. (1984), The Hilbert function of a special class of 1-dimensional Cohen – Macaulay

- graded algebras, The Curves Seminar at Queen's, *Queen's Paper in pure and Appl. Math.* **67**, 1-29.
- [4] Fatabbi G. and Lorenzini A. (2001), On the sharp bound for the regularity index for any set of fat points, *J. Pure Appl. Algebra*. **161**, 91-111.
- [5] Nagel U. and Trok B. (2018), Segre's regularity bound for fat points scheme, (accepted 30/3/2018 at *Annali della Scuole Normale Superiore*).
- [6] Segre B. (1961), Alcune question su insiemi finiti di punti geometria algebrica, *Atti. Convergn. Intern. di Torino*, 15-33.
- [7] Thien P.V. (2000), Segre bound for the regularity index of fat points in P^3 , *J. Pure and Appl. Algebra*, **151**, 197 – 214.
- [8] Thien P.V. (2012), Regularity index of $s+2$ fat points not on a linear $(s-1)$ -space, *Comm. Algebra*, **40**, 3704 – 3715.
- [9] Thien P.V. and Sinh T.N. (2017), On the regularity index of fat points not on a linear $(r-1)$ -space, $s \leq r + 3$, *Comm. Algebra*, **45**, 4123-4138.
- [10] Thien P.V. and Trinh T.T.V. (2019), An estimate of the regularity index of fat points in some, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* **49**, 399 – 410.

Liên hệ:

TS. Trần Nam Sinh

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

Địa chỉ: 459 Tôn Đức Thắng, Hòa Khánh Nam, Liên Chiểu, Đà Nẵng

Email: tnsinh@ued.und.vn

Ngày nhận bài: 02/12/2022

Ngày gửi phản biện: 05/12/2022

Ngày duyệt đăng: 25/01/2023