

STRONG LAWS OF LARGE NUMBERS FOR ARRAYS OF BLOCKWISE M -DEPENDENT RANDOM SETS

LUẬT MẠNH SỐ LỚN CHO MẢNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐA TRỊ M -PHỤ THUỘC THEO KHỐI

Hoàng Thị Duyên

Trường Đại học Quảng Bình

ABSTRACT: *In this paper, we establish strong laws of large numbers for arrays of blockwise M -dependent random sets in separable Banach space.*

Key words: *Random variables, M -independent, blockwise, multivalued, expectation.*

TÓM TẮT: *Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập một số luật mạnh số lớn cho mảng các biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc theo khối trong không gian Banach thực khả ly.*

Từ khóa: *Biến ngẫu nhiên đa trị, M -phụ thuộc, theo khối, đa trị, kỳ vọng.*

1. GIỚI THIỆU

Khái niệm M -phụ thuộc theo khối cho dãy các biến ngẫu nhiên đã được giới thiệu bởi Móricz [7], sau đó tác giả đã mở rộng luật số lớn Kolmogorov cổ điển (xem [3]) sang trường hợp M -phụ thuộc theo khối vào năm 1997. Kết quả của Móricz [7] đã được tổng quát bởi Gaposhkin [5]. Móricz, Stadtmüller và Thalmaier [8] đã tiếp tục nghiên cứu khái niệm M -phụ thuộc theo khối cho mảng các biến ngẫu nhiên, sau đó các tác giả chứng minh luật mạnh số lớn cho mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc theo khối dưới điều kiện moment. Vào năm 2011, Stadtmüller and Thanh [11] đã định nghĩa lại khái niệm này theo một cách khác và đã thu được một số luật mạnh số lớn cho mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc theo khối với khối tùy ý. Gần đây, Castaing, Quảng và Duyên

[2] đã đưa ra định nghĩa biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc theo khối, sau đó các tác giả đã thiết lập luật mạnh số lớn cho mảng các biến ngẫu nhiên đa trị dưới sự hội tụ Wijsman, hội tụ slice compact yếu, hội tụ slice và hội tụ Mosco. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu sự hội tụ Hausdorff cho mảng các biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc theo khối.

Trước hết chúng tôi xin giới thiệu một số kí hiệu, định nghĩa được sử dụng trong bài báo này. Cho $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ và $\mathbf{E}$ là không gian Banach thực khả ly. Ta kí hiệu $P(\mathbf{E})$ là họ tất cả các tập con khác rỗng của $\mathbf{E}$, $c(\mathbf{E})$ (tương ứng, $cc(\mathbf{E})$, $ck(\mathbf{E})$, $k(\mathbf{E})$) là họ gồm các tập con đóng (tương ứng, lồi đóng, compact lồi, compact) khác rỗng của $\mathbf{E}$ và $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ là σ -đại số Borel trên $\mathbf{E}$.

Với $A, B \in k(\mathbf{E})$, khoảng cách Hausdorff của A và B được định nghĩa bởi

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right\}.$$

Không gian $(k(\mathbf{E}), d_H)$ là không gian metric đủ và khả ly (xem [1,16]). Với X là biến ngẫu nhiên đa trị, Ánh xạ $X: \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ từ Ω vào $P(\mathbf{E})$ được gọi là ánh xạ đa trị. Ánh xạ đa trị $X: \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ được gọi là ánh xạ $\mathcal{F}$ -đo được nếu với mỗi $B \in c(\mathbf{E})$, ta có

$$X^-(B) = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}.$$

Ánh xạ đa trị $X: \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ nhận giá trị trong $c(\mathbf{E})$ được gọi là biến ngẫu nhiên đa trị nếu X là ánh xạ $\mathcal{F}$ - đo được. σ -đại số trên $c(\mathbf{E})$ được sinh bởi các tập

$$U^- = \{F \in c(\mathbf{E}): F \cap U \neq \emptyset\},$$

với U là tập con mở của $\mathbf{E}$, gọi là σ -đại số Effros và được kí hiệu là $\mathcal{B}_{c(\mathbf{E})}$. Với X là biến ngẫu nhiên đa trị, ta kí hiệu $\mathcal{F}_X = \{X^{-1}(U): U \in \mathcal{B}_{c(\mathbf{E})}\}$, trong đó

$$X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in U\}.$$

Khi đó $\mathcal{F}_X$ là σ -đại số con bé nhất của $\mathcal{F}$ mà X đo được. Phân phối của X là một độ đo xác suất P_X trên $\mathcal{B}_{c(\mathbf{E})}$ và được xác định bởi

$$P_X(\mathcal{U}) = \{P(X^{-1}(\mathcal{U})): \mathcal{U} \in \mathcal{B}_{c(\mathbf{E})}\}.$$

Ta kí hiệu $L^1_{\mathbf{E}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian Banach gồm các biến ngẫu nhiên $f: \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ sao cho $\|f\|_1 = E(\|f\|) < \infty$.

Nếu $\mathbf{E} = \mathbb{R}$ thì ta viết gọn $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là L^1 . Ta đặt

$$S^1_x = \{f \in L^1_{\mathbf{E}}(\Omega, \mathcal{F}, P): f(\omega) \in X(\omega) \text{ h.c.c.}\}.$$

Kỳ vọng EX của biến ngẫu nhiên đa trị X trên Ω được định nghĩa như sau

$$EX = \{Ef: f \in S^1_x\},$$

trong đó, Ef là tích phân Bochner thông thường của f .

Biến ngẫu nhiên đa trị X được gọi là khả tích nếu tập $S^1_x \neq \emptyset$. Ngoài ra, X được gọi là bị chặn khả tích nếu biến ngẫu nhiên thực

$$|X|(\omega) = \sup\{|x|: x \in X(\omega)\}$$

khả tích. Một biến ngẫu nhiên đa trị bị chặn khả tích thì khả tích nhưng chiều ngược lại không đúng. Một mảng các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{m,n}: m, n \geq 1\}$ được gọi là độc lập (tương ứng, độc lập đôi một) nếu mảng các σ -đại số sinh bởi chúng $\{\mathcal{F}_{X_{m,n}}: m, n \geq 1\}$ độc lập (tương ứng, độc lập đôi một) và được gọi là cùng phân phối nếu tất cả các phân phối $P_{X_{ij}}$ của chúng đều bằng nhau. Kí hiệu $\bar{B}^c_{\mathbf{E}^*}$ là hình cầu đóng đơn vị của $\mathbf{E}^*$ liên kết với tôpô của sự hội tụ compact $C(\bar{B}^c_{\mathbf{E}^*})$ là không gian Banach thực khả ly gồm tất cả các hàm liên tục φ xác định trên $\bar{B}^c_{\mathbf{E}^*}$ liên kết với chuẩn của sự hội tụ đều $\|\varphi\|_{\infty} = \sup_{x^* \in \bar{B}^c_{\mathbf{E}^*}} |\varphi(x^*)|$. Ta cũng

kí hiệu $\mathcal{L}^1_{ck(\mathbf{E})}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian gồm các biến ngẫu nhiên đa trị bị chặn khả tích nhận giá trị trong $ck(\mathbf{E})$ và $L^1_{C(\bar{B}^c_{\mathbf{E}^*})}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian gồm tất cả các biến ngẫu nhiên khả tích nhận giá trị trong $C(\bar{B}^c_{\mathbf{E}^*})$.

Giả sử $X \in \mathcal{L}_{ck(\mathbf{E})}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, theo [9] ta có $E(\delta^*(\cdot, X)) \in C(\bar{B}_{\mathbf{E}^*}^c)$, giá trị của hàm $E(\delta^*(\cdot, X))$ tại x^* được cho bởi $E(\delta^*(\cdot, X))(x^*) = E(\delta^*(x^*, X)) = \delta^*(x^*, EX)$. Ngoài ra, qua ánh xạ $j: X \rightarrow \delta^*(\cdot, X)$, không gian $\mathcal{L}_{ck(\mathbf{E})}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ được nhúng như là một nón lồi vào không gian $L_{C(\bar{B}_{\mathbf{E}^*}^c)}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sao cho với mọi biến ngẫu nhiên đa trị $X \in \mathcal{L}_{ck(\mathbf{E})}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

$$E(j(X)) = j(EX)$$

và với mọi $X, Y \in \mathcal{L}_{ck(\mathbf{E})}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ta có

$$\|j(X) - E(j(Y))\|_\infty = d_H(X, EY).$$

2. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Giả sử M là số nguyên không âm. Một họ hữu hạn các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{11}, \dots, X_{mn}\}$ được gọi là M -phụ thuộc nếu hoặc $m \vee n \leq M$ hoặc $m \vee n > M$ và các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{11}, \dots, X_{ij}\}$ độc lập với các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{kl}, \dots, X_{mn}\}$ khi $(k-i) \vee (l-j) > M$. Một mảng các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{mn}: m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là M -phụ thuộc nếu với mỗi $m \geq 1, n \geq 1$, các tập ngẫu nhiên đa trị $\{X_{11}, \dots, X_{mn}\}$ là M -phụ thuộc.

Xét $\{u_k: k \geq 1\}$ và $\{v_l: l \geq 1\}$ là hai dãy các số nguyên dương với $u_1 = v_1 = 1$. Đặt $\Delta_{kl} = [u_k, u_{k+1}) \times [v_l, v_{l+1})$, $k \geq 1, l \geq 1$. Ta nói rằng mảng các biến ngẫu nhiên đa

trị $\{X_{mn}: m \geq 1, n \geq 1\}$ là M -phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối $\{\Delta_{kl}: k \geq 1, l \geq 1\}$, nếu với mỗi $k \geq 1$ và $l \geq 1$, các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{mn}: (m, n) \in \Delta_{kl}\}$ là M -phụ thuộc.

Với hai dãy $\{u_k: k \geq 1\}$, $\{v_l: l \geq 1\}$ và $\{\Delta_{kl}: k \geq 1, l \geq 1\}$ ở trên, với mỗi $m \geq 0$, $n \geq 0$, $k \geq 1, l \geq 1$, chúng tôi giới thiệu các kí hiệu sau:

$$\Delta^{(mn)} = \{(i, j): 2^m \leq i < 2^{m+1}, 2^n \leq j < 2^{n+1}\},$$

$$\Delta_{kl}^{(mn)} = \Delta_{kl} \cap \Delta^{(mn)},$$

$$I_{mn} = \{(k, l): \Delta_{kl}^{(mn)} \neq \emptyset\},$$

$$r_k^{(m)} = \min\{i: i \in [u_k, u_{k+1}) \cap [2^m, 2^{m+1})\}$$

$$s_l^{(n)} = \min\{i: i \in [v_l, v_{l+1}) \cap [2^n, 2^{n+1})\},$$

$$c_{mn} = \text{card} I_{mn},$$

$$\varphi(k, l) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} I_{\Delta^{(ij)}}(k, l),$$

$$\phi(k, l) = \max_{i \leq k, j \leq l} \varphi(i, j),$$

trong đó $I_{\Delta^{(ij)}}$ là hàm chỉ tiêu của tập $\Delta^{(ij)}$, $i \geq 0, j \geq 0$.

Trước tiên, chúng tôi đưa ra tính chất quan trọng của mảng các biến ngẫu nhiên đa trị trong không gian Banach thực khả ly.

Bổ đề 2.1 (xem [2, Bổ đề 3.2]) Nếu $\{X_{mn}: m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối $\{\Delta_{kl}: k \geq 1, l \geq 1\}$ và ánh xạ $\psi: c(\mathbf{E}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ đo được Effros,

thì $\{\psi(X_{mn}) : m, n \geq 1\}$ là các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối $\{\Delta_{kl} : k \geq 1, l \geq 1\}$.

Định lý dưới đây thiết lập luật mạnh số lớn cho mảng các phần tử ngẫu nhiên M -phụ thuộc đôi một theo khối. Kết quả này đã mở rộng [4, Định lý 2.3] sang mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc theo khối và compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro.

Định lý 2.2 [2, Định lý 3.1] Giả sử $1 \leq p \leq 2$ và $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathbf{E}$. Nếu $\{X_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ là compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro, M -phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối $\{\Delta_{kl} : k \geq 1, l \geq 1\}$ và nếu

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\|X_{mn}\|^p)}{(mn)^p} (\varphi(m, n))^{p-1} < \infty$$

thì ta có

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - EX_{ij}) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Định lý dưới đây thiết lập luật mạnh số lớn cho mảng các biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị compact lồi trong không gian Banach thực khả ly.

Định lý 2.3 Giả sử $1 \leq p \leq 2$ và $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị bị chặn khả tích nhận giá trị trong $ck(\mathbf{E})$. Nếu $\{X_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro,

M -phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối $\{\Delta_{kl} : k \geq 1, l \geq 1\}$ và nếu

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|X_{mn}|^p)}{(mn)^p} (\varphi(m, n))^{p-1} < \infty$$

thì ta có

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} d_H\left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n EX_{ij}\right) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Chứng minh. Vì $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị bị chặn khả tích nhận giá trị trong $ck(\mathbf{E})$ nên $\{\delta^*(\cdot, X_{mn}) : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian $L^1_{C(\bar{B}_{\mathbf{E}}^c)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Vì $\|X_{mn}\| = \|\delta^*(\cdot, X_{mn})\|_{\infty}$ nên ta có

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\|\delta^*(\cdot, X_{mn})\|_{\infty}^p)}{(mn)^p} (\varphi(m, n))^{p-1} < \infty.$$

Hơn nữa theo [9], $\{\delta^*(\cdot, X_{mn}) : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathbf{E}$ compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro nên $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ thỏa các điều kiện của Định lý 2.3, do đó ta thu được luật mạnh số lớn

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\delta^*(\cdot, X_{ij}) - E(\delta^*(\cdot, X_{ij}))) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Từ đây ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{m \vee n \rightarrow \infty} d_H\left(\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}, \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n EX_{ij}\right) \\ &= \lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\delta^*(\cdot, X_{ij}) - \delta^*(\cdot, EX_{ij})) \\ &= \lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\delta^*(\cdot, X_{ij}) - E(\delta^*(\cdot, X_{ij}))) \\ &= 0 \text{ h.c.c.} \end{aligned}$$

Định lý đã được chứng minh.

Hệ quả 2.4 Giả sử $1 \leq p \leq 2$ và $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị thỏa các điều kiện của Định lý 2.3 với $\Delta_{kl} = [2^{k-1}, 2^k) \times [2^{l-1}, 2^l)$, $k \geq 1, l \geq 1$ (hoặc, trong trường hợp tổng quát $\Delta_{kl} = [q^{k-1}, q^k) \times [q^{l-1}, q^l)$ với k, l đủ lớn và $q > 1$) và thỏa thêm điều kiện

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|X_{mn}|^p)}{(mn)^p} < \infty.$$

Khi đó kết luận của Định lý 2.3 được thỏa mãn.

Chứng minh. Trong trường hợp này ta có $\varphi(i, j) = O(1)$. Như vậy, từ Định lý 2.3 ta thu được kết luận.

Hệ quả 2.5 Giả sử $1 \leq p \leq 2$ và $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị thỏa các điều kiện của Định lý 2.3 với $\Delta_{kl} = [2^{k^\alpha}, 2^{(k+1)^\alpha}) \times [2^{l^\beta}, 2^{(l+1)^\beta})$, $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ và

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|X_{mn}|^p)}{(mn)^p} ((\log m)^{(1-\alpha)/\alpha} (\log n)^{(1-\beta)/\beta})^{p-1} < \infty.$$

Khi đó kết luận của Định lý 2.3 được thỏa mãn.

Chứng minh. Kết luận suy ra từ Định lý 2.3 và

$$\varphi(i, j) = O((\log m)^{(1-\alpha)/\alpha} (\log n)^{(1-\beta)/\beta}).$$

Hệ quả 2.6 Giả sử $1 \leq p \leq 2$ và $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị thỏa các điều kiện của Định

lý 2.3 với

$$\Delta_{kl} = [k^\alpha, (k+1)^\alpha) \times [l^\beta, (l+1)^\beta), \alpha > 1, \beta > 1,$$

và nếu

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|X_{mn}|^p)}{m^{p-1/\alpha} n^{p-1/\beta}} < \infty.$$

Khi đó kết luận của Định lý 2.3 được thỏa mãn.

Chứng minh. Kết luận suy ra từ Định lý 2.3 và $\varphi(i, j) = O(m^{1/\alpha} n^{1/\beta})$.

Hệ quả 2.7 Giả sử $1 \leq p \leq 2$ và $\{X_{mn} : m, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên đa trị tùy ý thỏa các điều kiện của Định lý 2.3 với

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|X_{mn}|^p)}{mn} < \infty.$$

Khi đó kết luận của Định lý 2.3 được thỏa mãn.

Chứng minh. Kết luận suy ra từ Định lý 2.3 với nhận xét rằng mảng các biến ngẫu nhiên đa trị bị chặn khả tích nhận giá trị compact lồi là 0-phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối

$$\Delta_{kl} = [k, k+1) \times [l, l+1), k > 1, l > 1$$

$$\text{và } \varphi(i, j) = O(mn).$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math. 580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [2] C. Castaing, H. T. Duyen, N. V. Quang, Strong laws of large numbers for arrays of blockwise M -dependent random sets,

- Vietnam J. Math.* 51 (2023), 379-396.
- [3] Y. S. Chow and H. Teicher, *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales*, Third Edition, Springer-Verlag, New York, 1997.
 - [4] P. Z. Daffer and R. L. Taylor, Tightness and strong laws of large numbers in Banach space, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.* 10 (3)(1982), 251-
 - [5] V. F. Gaposhkin, On the strong law of large numbers for blockwise independent and blockwise orthogonal random variables, *Theory Probab. Appl.* 39 (1995), 667-684.
 - [6] F. Hiai and H. Umegaki, Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, *J. Multivariate Anal.* 7 (1977), 149-182.
 - [7] F. Móricz, Strong limit theorems for blockwise m -dependent and blockwise quasiorthogonal sequences of random variables, *Proc. Amer. Math. Soc.* 101 (4) (1987), 709-715.
 - [8] F. Móricz, U. Stadtmüller and M. Thalmaier, Strong laws for blockwise M -dependent random fields, *J. Theoret. Probab.* 21 (2008), 660-671.
 - [9] N. V. Quang and H. T. Duyen, Convergence of weighted sums and strong law of large numbers for convex compact integrable random sets and fuzzy random sets, *J. Convex Anal.* 24 (2017), 213-238.
 - [10] N. V. Quang and L. V. Thanh, On the strong laws of large numbers for two-dimensional arrays of blockwise independent and blockwise orthogonal random variables, *Probab. Math. Statist.* 25 (2005), 385-391. Stadtmüller
 - [11] U. Stadtmüller and L. V. Thanh, On the strong limit theorems for double arrays of blockwise M -dependent random variables, *Acta. Math. Sin. Engl. Ser.*, 10 (2011), 1923-1934.

Liên hệ:

TS. Hoàng Thị Duyên

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Quảng Bình

Địa chỉ: 312 Lý Thường Kiệt, Đồng Hới, Quảng Bình

Email: duyenht@quangbinhuni.edu.vn

Ngày nhận bài: 15/12/2022

Ngày gửi phản biện: 17/12/2022

Ngày duyệt đăng: 25/01/2023