

# MARCINKIEWICZ-ZYGMUND TYPE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR RANDOM VARIABLES IN METRIC SPACES

## LUẬT MẠNH SỐ LỚN DẠNG MARCINKIEWICZ-ZYGMUND CHO CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN TRONG KHÔNG GIAN METRIC

**Phạm Trí Nguyễn**

Trường Đại học Điện lực

**ABSTRACT:** *In this paper, we establish some results of strong law of large numbers for random variables satisfy the maximal inequality with exponent  $p$  ( $0 < p \leq 2$ ) in metric spaces.*

**Keywords:** *Strong law of large numbers, Almost sure convergence, Convex combination space.*

**TÓM TẮT:** *Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập một số kết quả dạng luật mạnh số lớn cho các biến ngẫu nhiên thỏa mãn bất đẳng thức cực đại với số mũ  $p$  ( $0 < p \leq 2$ ) trong không gian metric.*

**Từ khóa:** *Luật mạnh số lớn, hội tụ hầu chắc chắn, không gian tổ hợp lồi.*

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund đã được nhiều tác giả nghiên cứu và thiết lập. Etemadi [3] chứng minh luật mạnh số lớn cho các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một cùng phân phối. Sau đó, Choi và Sung [1] mở rộng kết quả của Etemadi cho các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên  $X$  với  $E(|X|^p (\log^+ |X|)^2) < \infty$  ( $1 < p < 2$ ).

Hong và Hwang [4], Hong và Volodin [5] thiết lập luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên. Trong [2], Dung và các cộng sự đã thu được luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund cho mảng kép các phần tử ngẫu nhiên trong không gian Banach, kết quả của Dung và các cộng sự mở rộng kết quả tương ứng của Hong và Volodin.

Trong bài báo này, dựa vào khái niệm không gian tổ hợp lồi được đưa ra bởi Terán và Molchanov [8], chúng tôi phát biểu khái niệm về họ các biến ngẫu nhiên trong không gian tổ hợp lồi thỏa mãn bất đẳng thức cực đại với số mũ  $p$  ( $0 < p \leq 2$ ). Từ đó, chúng tôi thu được luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund cho họ các biến ngẫu nhiên trong không gian tổ hợp lồi thỏa mãn bất đẳng thức cực đại với số mũ  $p$  ( $0 < p \leq 2$ ).

### 2. BIẾN NGẪU NHIÊN TRONG KHÔNG GIAN METRIC

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian metric với phép toán tổ hợp lồi (hay còn gọi là không gian tổ hợp lồi) và biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian tổ hợp lồi được đưa ra bởi Terán và Molchanov trong [8].

Giả sử  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  là không gian xác suất đầy đủ và  $(\Xi, d)$  là không gian metric. Với  $A \in \mathcal{A}$ , ta ký hiệu  $I_A$  là hàm chỉ tiêu của  $A$ . Trang bị trên  $\Xi$  một phép toán tổ hợp lồi như sau: với  $n \geq 2$  các số  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  và các phần tử  $u_1, \dots, u_n \in \Xi$ , phép toán tổ hợp lồi cho kết quả là một phần tử của  $\Xi$  và nó được ký hiệu là  $[\lambda_i, u_i]_{i=1}^n$  hoặc  $[\lambda_1, u_1; \dots; \lambda_n, u_n]$  và ta giả thiết rằng  $[1, u] = u$  với mọi  $u \in \Xi$ . Chú ý rằng trong trường hợp  $\Xi$  là không gian tuyến tính thì ta có thể đồng nhất phép toán tổ hợp lồi với phép cộng và phép nhân vô hướng thông thường, nghĩa là  $[\lambda_i, u_i]_{i=1}^n = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ . Giả sử 5 tiên đề sau được thỏa mãn:

- TĐ1 (Tính giao hoán)

$$[\lambda_i, u_i]_{i=1}^n = [\lambda_{\sigma(i)}, u_{\sigma(i)}]_{i=1}^n \text{ với mọi hoán vị } \sigma \text{ của } \{1, 2, \dots, n\}$$

- TĐ2 (Tính kết hợp)

$$[\lambda_i, u_i]_{i=1}^{n+2} = \left[ \lambda_1, u_1; \dots; \lambda_n, u_n; \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2}, \left[ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2}}, u_{n+1} \right]_{j=1}^2 \right]$$

- TĐ3 (Tính liên tục): Nếu  $u, v \in \Xi$  và

$$\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda \in (0, 1) \text{ khi } k \rightarrow \infty \text{ thì}$$

$$[\lambda^{(k)}, u; 1 - \lambda^{(k)}, v] \rightarrow [\lambda, u; 1 - \lambda, v]$$

- TĐ4 (Độ cong âm): Với mọi  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \Xi$  và  $\lambda \in (0, 1)$  thì

$$d([\lambda, u_1; 1 - \lambda, u_2], [\lambda, v_1; 1 - \lambda, v_2]) \leq \lambda d(u_1, v_1) + (1 - \lambda) d(u_2, v_2).$$

- TĐ5 (Sự lồi hoá): Với mỗi  $u \in \Xi$ , tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n^{-1}, u]_{i=1}^n$ , giới hạn này được ký hiệu bởi  $K_{\Xi} u$  (hoặc  $Ku$  nếu không sợ nhầm lẫn) và  $K$  được gọi là toán tử lồi hoá.

Không gian metric  $(\Xi, d)$  trang bị phép toán tổ hợp lồi thỏa mãn 5 tiên đề nêu trên thì được gọi là không gian tổ hợp lồi. Từ các tiên đề nêu trên ta thu được các tính chất cơ bản của không gian tổ hợp lồi như sau:

- TC1: Với mọi  $u_1, \dots, u_m \in \Xi$  và  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n > 0$  sao cho  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = 1$ . Ta có

$$\left[ \alpha_i, [\beta_j, u_{ij}]_{j=1}^n \right]_{i=1}^m = [\alpha_i \beta_j, u_{ij}]_{i=1, j=1}^{i=m, j=n}$$

- TC2: Phép toán tổ hợp lồi là liên tục đối với  $2n$  biến của nó. Nghĩa là

$$\text{- Với mọi phần tử } u_1, u_2, \dots, u_n \in \Xi$$

và các số  $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)} > 0$  thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(k)} = 1.$$

Nếu  $\lambda_i^{(k)} \rightarrow \lambda_i \in (0, 1)$  khi  $k \rightarrow \infty$  thì

$$[\lambda_i^{(k)}, u_i]_{i=1}^n \rightarrow [\lambda_i, u_i]_{i=1}^n.$$

- Với mọi số  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$  thỏa mãn

$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  và mọi phần tử  $u_1^{(k)}$ ,  $u_2^{(k)}, \dots, u_n^{(k)} \in \Xi$ . Nếu  $u_i^{(k)} \rightarrow u_i \in \Xi$  khi  $k \rightarrow \infty$  thì

$$\left[ \lambda_i, u_i^{(k)} \right]_{i=1}^n \rightarrow \left[ \lambda_i, u_i \right]_{i=1}^n.$$

• TC3: Toán tử lồi hoá  $K$  là tuyến tính, nghĩa là:

$$K\left(\left[\lambda_j, u_j\right]_{j=1}^n\right) = \left[\lambda_j, Ku_j\right]_{j=1}^n.$$

• TC4: Nếu  $u \in \Xi$  và  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$  thỏa mãn  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ , thì

$$K\left(\left[\lambda_j, u\right]_{j=1}^n\right) = Ku = \left[\lambda_j, Ku\right]_{j=1}^n.$$

• TC5: Với các số  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  sao cho  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  và các phần tử  $u, v \in \Xi$  thì

$$[\lambda_1, u; \lambda_2, Kv; \lambda_3, Kv] = [\lambda_1, u; (\lambda_2 + \lambda_3), Kv].$$

• TC6: Ánh xạ  $K$  là không giãn đối với metric  $d$ , nghĩa là:  $d(Ku, Kv) \leq d(u, v)$ .

Cho ánh xạ  $X: \Omega \rightarrow \Xi$ ,  $X$  được gọi là biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên  $\Xi$  (hay biến ngẫu nhiên  $\Xi$  - giá trị) nếu  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  với mọi  $B \in \mathcal{B}(\Xi)$ , trong đó  $\mathcal{B}(\Xi)$  là  $\sigma$ -đại số Borel trên  $\Xi$ .

Từ giờ trở đi, chúng ta luôn giả thiết rằng  $(\Xi, d)$  là không gian metric đầy đủ và khả ly. Cố định  $u_0 \in K(\Xi)$ , biến ngẫu nhiên  $\Xi$  - giá trị  $X$  được gọi là khả tích nếu  $Ed(u_0, X) < \infty$ . Chú ý rằng định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn phần tử  $u_0$ . Tập hợp tất cả các biến ngẫu

niên khả tích trên  $\Xi$  được ký hiệu là  $\mathcal{L}(\Xi)$ , metric trên  $\mathcal{L}(\Xi)$  được định nghĩa bởi  $\Delta(X, Y) = Ed(X, Y)$ .

Cho biến ngẫu nhiên đơn giản  $X = [I_{\Omega_i}, x_i]$ . Khi đó kỳ vọng của  $X$  được định nghĩa bởi  $E(X) = [P(\Omega_i), Kx_i]_{i=1}^n$ . Nếu  $X$  là biến ngẫu nhiên bất kỳ thuộc  $\mathcal{L}(\Xi)$  thì tồn tại dãy các biến ngẫu nhiên đơn giản hội tụ đến  $X$  và do đó kỳ vọng của  $X$  được định nghĩa là giới hạn của dãy các kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên đơn giản. Chú ý rằng:

$$d(EX, EY) \leq Ed(X, Y)$$

với mọi  $X, Y \in \mathcal{L}(\Xi)$ .

Ta kết thúc mục này bằng việc trình bày khái niệm về tính bị chặn ngẫu nhiên. Họ các biến ngẫu nhiên thực  $\{X_i : i \geq 1\}$  được gọi là bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên thực  $X$  nếu tồn tại hằng số  $C$  ( $0 < C < \infty$ ) sao cho với mọi  $i \geq 1$ ,  $t \geq 0$  thì

$$P\{|X_i| \geq t\} \leq CP\{|X| \geq t\}.$$

### 3. KẾT QUẢ CHÍNH

Trong mục này, ta ký hiệu hầu chắc chắn là h.c.c và  $C$  là hằng số dương nào đó và nó không nhất thiết phải giống nhau trong mỗi lần xuất hiện. Với phần tử  $u_0$  cố định đã nêu trong mục trước, để tiện cho việc trình bày ta ký hiệu  $\|x\|_{u_0} = d(x, u_0)$  với mọi  $x \in \Xi$ .

**Định nghĩa 3.1.** Họ  $\{X_i : i \geq 1\}$  các biến ngẫu nhiên  $\Xi$  - giá trị được gọi là thỏa mãn bất đẳng thức cực đại với số

mũ  $p$  ( $0 < p \leq 2$ ) nếu tồn tại hằng số  $C$  ( $0 < C < \infty$ ) sao cho với mỗi  $n \geq 1$ , thì

$$E \left( \max_{1 \leq k \leq n} kd \left( [k^{-1}, X_i]_{i=1}^k, [k^{-1}, EX_i]_{i=1}^k \right) \right)^p \leq C \sum_{i=1}^n E \|X_i\|_{u_0}^p. \quad (1)$$

Nhận xét rằng với  $0 < p \leq 1$  thì mọi họ  $\{X_i : i \geq 1\}$  các biến ngẫu nhiên  $\Xi$  - giá trị đều thỏa mãn (1). Thật vậy, với  $0 < p \leq 1$  ta có

$$\begin{aligned} & E \left( \max_{1 \leq k \leq n} kd \left( [k^{-1}, EX_i]_{i=1}^k, [k^{-1}, EX_i]_{i=1}^k \right) \right)^p \\ & \leq E \left( \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k d(X_i, EX_i) \right)^p \\ & = E \left( \sum_{i=1}^n d(X_i, EX_i) \right)^p \leq 2^p \sum_{i=1}^n E \|X_i\|_{u_0}^p. \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần quan tâm đến trường hợp  $1 < p \leq 2$ .

Sau đây là ví dụ minh họa cho Định nghĩa 3.1, ví dụ được cho trong không gian Banach.

**Ví dụ 3.2.** Giả thiết rằng không gian tổ hợp lồi  $\Xi$  là không gian Banach với chuẩn  $\|\cdot\|$ . Ta biết rằng không gian Banach  $\Xi$  được gọi là Rademacher dạng  $p$  ( $1 \leq p \leq 2$ ) nếu tồn tại hằng số  $C$  ( $0 < C < \infty$ ) sao cho với mỗi  $n \geq 1$  thì

$$E \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|^p \leq C \sum_{i=1}^n E \|X_i\|^p$$

với mọi phần tử ngẫu nhiên  $\Xi$  - giá trị  $X_1, X_2, \dots, X_n$  có kỳ vọng 0 (chi tiết có

thể xem trong [6]). Khi đó, nếu giả thiết thêm rằng họ  $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$  là độc lập thì bằng các lập luận tương tự như trong Bổ đề 1.1 [7], ta nhận được họ  $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$  thỏa mãn bất đẳng thức cực đại với số mũ  $p$  ( $1 \leq p \leq 2$ ).

Để chứng minh các kết quả chính trong mục này, chúng ta cần bổ đề dưới đây.

**Bổ đề 3.3.** Giả sử  $\{x_n : n \geq 1\}$  là họ các số thực không âm. Nếu tồn tại dãy con  $\{n_k : k \geq 1\}$  của dãy chỉ số  $\{n : n \geq 1\}$  sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{n_k \leq n < n_{k+1}} x_n = 0,$$

thì  $x_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

**Chứng minh.** Cho  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  sao cho với mọi  $k \geq N_\varepsilon$  thì

$$\max_{n_k \leq n < n_{k+1}} x_n < \varepsilon.$$

Khi đó, với mỗi  $n \geq N_\varepsilon$ , tồn tại  $k \geq N_\varepsilon$  sao cho  $n_k \leq n < n_{k+1}$ . Do đó

$$x_n \leq \max_{n_k \leq n < n_{k+1}} x_n < \varepsilon.$$

Từ tính tùy ý của  $\varepsilon$  ta suy ra điều phải chứng minh.

Trong kết quả đầu tiên, chúng ta thiết lập luật mạnh số lớn cho họ các biến ngẫu nhiên  $\Xi$  - giá trị thỏa mãn bất đẳng thức cực đại với số mũ  $p$  ( $1 < p \leq 2$ ).

**Định lý 3.4.** Cho họ  $\{X_i : i \geq 1\}$  các biến ngẫu nhiên  $\Xi$  - giá trị thỏa mãn

bất đẳng thức cực đại với số mũ  $p$  ( $1 < p \leq 2$ ). Nếu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E \|X_i\|_{u_0}^p}{(i^\alpha)^p} < \infty$$

với  $\alpha > 0$  thì ta có luật mạnh số lớn

$$n^{1-\alpha} d([n^{-1}, X_i]_{i=1}^n, [n^{-1}, EX_i]_{i=1}^n) \rightarrow 0 \text{ h.c.c khi } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

**Chứng minh.** Cho  $\varepsilon > 0$ , theo bất đẳng thức Markov và (1) ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} P \left\{ \max_{2^k \leq n < 2^{k+1}} n^{1-\alpha} d([n^{-1}, X_i]_{i=1}^n, [n^{-1}, EX_i]_{i=1}^n) > \varepsilon \right\} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} P \left\{ \max_{2^k \leq n < 2^{k+1}} \frac{n}{2^{k\alpha}} d([n^{-1}, X_i]_{i=1}^n, [n^{-1}, EX_i]_{i=1}^n) > \varepsilon \right\} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} P \left\{ \max_{2^k \leq n < 2^{k+1}} n d([n^{-1}, X_i]_{i=1}^n, [n^{-1}, EX_i]_{i=1}^n) > 2^{k\alpha} \varepsilon \right\} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k\alpha} \varepsilon)^p} E \left( \max_{2^k \leq n < 2^{k+1}} n d([n^{-1}, X_i]_{i=1}^n, [n^{-1}, EX_i]_{i=1}^n) \right)^p \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k\alpha} \varepsilon)^p} E \left( \max_{1 \leq n < 2^{k+1}} n d([n^{-1}, X_i]_{i=1}^n, [n^{-1}, EX_i]_{i=1}^n) \right)^p \\ & \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2^{k+1}} E \|X_i\|_{u_0}^p}{(2^{k\alpha})^p} \\ & \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E \|X_i\|_{u_0}^p}{(i^\alpha)^p} < \infty. \end{aligned}$$

Từ bổ đề Borel-Cantelli, ta suy ra

$$\begin{aligned} & \max_{2^k \leq n < 2^{k+1}} n^{1-\alpha} d([n^{-1}, X_i]_{i=1}^n, [n^{-1}, EX_i]_{i=1}^n) \\ & \rightarrow 0 \text{ h.c.c khi } k \rightarrow \infty. \quad (3) \end{aligned}$$

Kết hợp (3) với Bổ đề 3.3 ta có điều phải chứng minh.

Trong định lý tiếp theo, ta thiết lập luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund cho họ các biến ngẫu nhiên  $\Xi$  -

giá trị thỏa mãn bất đẳng thức cực đại với số mũ  $p$  ( $1 < p \leq 2$ ).

**Định lý 3.5.** Cho họ  $\{X_i : i \geq 1\}$  các biến ngẫu nhiên  $\Xi$  - giá trị thỏa mãn bất đẳng thức cực đại với số mũ  $p$  ( $1 < p \leq 2$ ). Giả sử họ  $\left\{ \|X_i\|_{u_0} : i \geq 1 \right\}$

bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên

$$X \text{ thỏa mãn } E(|X|^r \log^+ |X|) < \infty$$

với  $r \in (1, p)$ . Khi đó nếu

$$E \|X_i\|_{u_0}^p < \infty \text{ với mọi } i \geq 1 \text{ thì ta có luật mạnh số lớn}$$

$$n^{1-1/r} d([n^{-1}, X_i]_{i=1}^n, [n^{-1}, EX_i]_{i=1}^n) \rightarrow 0$$

$$\text{h.c.c khi } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

**Chứng minh.** Với mỗi  $n \geq 1$ , ta đặt

$$X'_n = \begin{cases} X_n, & \text{khi } \|X_n\|_{u_0} \leq n^{1/r} \\ u_0, & \text{khi } \|X_n\|_{u_0} > n^{1/r} \end{cases}$$

và

$$X''_n = \begin{cases} X_n, & \text{khi } \|X_n\|_{u_0} > n^{1/r} \\ u_0, & \text{khi } \|X_n\|_{u_0} \leq n^{1/r}. \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức tam giác, với  $n \geq 1$  thì

$$\begin{aligned} \|X_n\|_{u_0} & \leq d(X_n, X'_n) + \|X'_n\|_{u_0} \\ & \leq \|X''_n\|_{u_0} + \|X'_n\|_{u_0} \end{aligned}$$

Lập luận tương tự như trong Bổ đề 1.2 [7] cho trường hợp một chỉ số, ta thu được các bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E \|X'_i\|_{u_0}^p}{i^{p/r}} \leq CE \left( |X|^r \log^+ |X| \right) < \infty \quad (5)$$

và

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E \|X''_i\|_{u_0}^p}{i^{1/r}} \leq CE \left( |X|^r \log^+ |X| \right) < \infty. \quad (6)$$

Bởi giả thiết  $E \|X_i\|_{u_0}^p < \infty$  và (6), ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E \|X''_i\|_{u_0}^p}{i^{p/r}} < \infty. \quad (7)$$

Kết hợp (5) và (7), ta nhận được

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E \|X_i\|_{u_0}^p}{i^{p/r}} &\leq C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E \|X'_i\|_{u_0}^p}{i^{p/r}} \\ &\quad + C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E \|X''_i\|_{u_0}^p}{i^{p/r}} < \infty. \end{aligned}$$

Sử dụng Định lý 3.4 cho trường hợp  $\alpha = 1/r$  ta thu được điều phải chứng minh.

#### 4. KẾT LUẬN

Trong tài liệu tham khảo [2], các tác giả đã đưa ra khái niệm họ các phần tử ngẫu nhiên trong không gian Banach thỏa mãn bất đẳng thức Marcinkiewicz-Zygmund cực đại với số mũ  $p$  ( $0 < p \leq 2$ ). Từ đó, các tác giả đã chứng minh một số luật số lớn cho mảng hai chỉ số (mảng kép) các phần tử ngẫu nhiên trong không gian Banach. Trong bài báo này, khái niệm về họ các biến ngẫu nhiên  $\Xi$  - giá trị thỏa mãn bất đẳng thức cực đại với số mũ  $p$  ( $0 < p \leq 2$ ) là sự mở rộng tương ứng cần thiết của khái

niệm bất đẳng thức Marcinkiewicz-Zygmund cực đại với số mũ  $p$  ( $0 < p \leq 2$ ). Từ đó, chúng ta thu được các kết quả chính trong bài báo.

Qua đây, tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn đến sự hỗ trợ của trường đại học Điện lực cho tác giả trong quá trình nghiên cứu công trình này.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] B. D. Choi and S. H. Sung (1985), *On convergence of  $(S_n - ES_n) / n^{1/r}$ ,  $1 < r < 2$  for pairwise independent random variables*, Bull. Korean Math. Soc. **22** (2), 79-82.
- [2] L. V. Dung, T. Ngamkham, N. D. Tien and A. I. Volodin (2009), *Marcinkiewicz-Zygmund Type Law of Large Numbers for Double Arrays of Random Elements in Banach Spaces*, Lobachevskii Journal of Mathematics, vol 30, no **4**, 337-346.
- [3] N. Etemadi (1981), *An elementary proof of the strong law of large numbers*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **55** (1), 119-122.
- [4] D. H. Hong and S. Y. Hwang (1999), *Marcinkiewicz-type strong law of large numbers for double arrays of pairwise independent random variables*, Int. J. Math. Math. Sci. **22** (1), 171-177.
- [5] D. H. Hong, and A. I. Volodin (1999), *Marcinkiewicz-type law of large numbers for double arrays*, J. Korean Math. Soc **36** (6), 1133-1143.
- [6] G. Pisier (1975), *Martingales with values in uniformly convex spaces*, Israel J. Math. **20**, 326-350.
- [7] N. V. Quang and N. V. Huan (2009), *On the strong law of large numbers and  $L^p$ -convergence for double arrays of random elements in  $p$ -uniformly*

*smooth Banach spaces*, Statist. Probab. Lett., **79**, 1891-1899.

[8] P. Terán and I. Molchanov (2006), The

law of large numbers in a metric space with a convex combination operation, *J. Theoret. Probab*, Vol 19, no 4, 875-898.

***Liên hệ:***

**TS. Phạm Trí Nguyễn**

Trường Đại học Điện lực Việt Nam

Địa chỉ: Số 235 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội

Email: nguyentp@epu.edu.vn

Ngày nhận bài: 20/5/2022

Ngày gửi phản biện: 23/5/2022

Ngày duyệt đăng: 27/6/2022