

SOME EXTENSIONS OF THE YOUNG INEQUALITY AND APPLICATION

MỘT SỐ MỞ RỘNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC YOUNG VÀ ỨNG DỤNG

Hồ Nguyễn Nhật Linh¹, Nguyễn Thị Thu Hiền¹,
Hà Thị Thu Hằng¹, Phạm Văn Được²

¹Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

²Trường Đại học Duy Tân

ABSTRACT: In this note, we are going to prove some the Young inequality and the extended Young inequality by the methods of elementary mathematics. These results of Young's inequality are used to improve the Rogers - Hölder inequality for the class of functions in the space with

Từ khóa: Young's inequality, Rogers - Hölder's inequality; space L^p convex function.

TÓM TẮT: Bài báo này trình bày chứng minh các bất đẳng thức Young và bất đẳng thức Young cải tiến bằng các phương pháp của toán sơ cấp. Các kết quả của bất đẳng thức Young được sử dụng để chứng minh và cải tiến các bất đẳng thức Rogers - Hölder cho lớp các hàm thuộc không gian L^p với $p > 0$.

Từ khóa: Bất đẳng thức Young, bất đẳng thức Rogers - Hölder, không gian L^p , hàm lồi.

1. GIỚI THIỆU

Bất đẳng thức Young là một kết quả đẹp trong giải tích lồi và thường được chứng minh bằng phương pháp hàm lồi [1,2]. Bất đẳng thức này cũng là công cụ quan trọng để xây dựng chuẩn và nghiên cứu về không gian L^p với $p > 0$ [3,4]. Nhằm phù hợp hơn với nhiều bạn đọc, bài báo này trình bày lại các chứng minh của bất đẳng thức Young và bất đẳng thức Young mở rộng bằng các phương pháp toán học sơ cấp. Các kết quả của bất đẳng thức Young được ứng dụng để chứng minh các bất đẳng thức Rogers-Hölder và bất đẳng thức Rogers-Hölder cải tiến cho các hàm thuộc không gian L^p với $p > 0$.

2. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là một không gian đo được với μ là độ đo dương, đủ và σ -hữu hạn trên X . Với $p > 0$ ta ký hiệu $L^p(\mu)$ là không gian các hàm f đo được trên X và thỏa mãn

$$\int_X |f|^p(x) d\mu(x) = \int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Với $f \in L^p(\mu)$ ta đặt

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ở đây ta gọi hai hàm $f, g \in L^p(\mu)$ là bằng nhau hầu khắp nơi trên X (kí hiệu

$f = g$ (h.k.n) trên X) nếu tồn tại tập $A_{fg} \subset X$ thỏa mãn $\mu(A_{fg}) = 0$ và $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X \setminus A_{fg}$. Bởi tính chất của độ đo μ ta suy ra nếu $f = g$ (h.k.n) trên X thì $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Sau đây, chúng tôi nhắc lại một số kết quả chuẩn bị cho các nội dung ở các mục sau. Các kết quả này được tham khảo từ tài liệu [1] và các chứng minh được trình bày theo hướng sử dụng nhiều nhất các kỹ thuật của toán sơ cấp.

Định lý 2.1 (Bất đẳng thức Bernoulli).

Chứng minh rằng, với mọi $x > -1$ ta có

i. $(1+x)^p \geq 1+px$

với mọi $p \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$;

ii. $(1+x)^p \leq 1+px$ với mọi $p \in [0, 1]$.

Chứng minh:

- Với $p = 0$ hoặc $p = 1$ thì i. và ii. xảy ra dấu “=”.

- Ta xét trường hợp $p \neq 0; 1$: Xét hàm số sau

$$f(x) = (1+x)^p - 1 - px \quad (x > -1).$$

Ta có

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1} - p.$$

Từ đó suy ra

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta xét hai trường hợp sau đây

+ Với $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$: Ta có bảng biến thiên sau

x	-1	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+

f(x)	
------	--

Từ bảng biến thiên suy ra

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1+x)^p \geq 1+px$$

$$(\forall x > -1).$$

Vậy i. được chứng minh.

+ Với $p \in (0, 1)$: Ta có bảng biến thiên sau

x	-1	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)			

Từ bảng biến thiên suy ra

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (1+x)^p \leq 1+px$$

$$(\forall x > -1).$$

Vậy ii. được chứng minh.

Định lý 2.2 (Bất đẳng thức Young).

Chứng minh rằng với mọi $a, b > 0$ ta có

i. $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ với mọi $p > 1$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

ii. $ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ với mọi $0 < p < 1$

và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Chứng minh:

i. Áp dụng Định lý 2.1i. cho $1+x = \frac{a}{b^{q-1}}$ ta có

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b^{q-1}}\right)^p &\geq 1 + p \left(\frac{a}{b^{q-1}} - 1\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{a^p}{b^{p(q-1)}} \\
&\geq 1 + \frac{pa}{b^{q-1}} - p \\
&\Leftrightarrow a^p + \frac{pb^q}{q} \geq pab \\
&\Leftrightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.
\end{aligned}$$

Vậy i. được chứng minh.

ii. Áp dụng Định lí 2.1ii. cho $1 + x = \frac{a}{b^{q-1}}$ ta có

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b^{q-1}}\right)^p &\leq 1 + p \left(\frac{a}{b^{q-1}} - 1\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{a^p}{b^{p(q-1)}} \leq 1 + \frac{pa}{b^{q-1}} - p \\
&\Leftrightarrow a^p + \frac{pb^q}{q} \leq pab \\
&\Leftrightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab.
\end{aligned}$$

Vậy ii. được chứng minh.

Các bất đẳng thức Young xảy ra dấu “=” khi và chỉ khi

$$x = 0 \Leftrightarrow a = b^{q-1} \Leftrightarrow a^p = b^q.$$

Định lí 2.3 (Bất đẳng thức Rogers - Hölder). Cho $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là một không gian đo được và $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$. Chứng minh các mệnh đề sau đây

i. Nếu $p \geq 1$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ thì ta có

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

ii. Nếu $0 < p < 1$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ thì ta có

$$\|fg\|_1 \geq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Chứng minh:

i. Áp dụng Định lí 2.2i. cho $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$,

$b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} &\leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \\
&\quad + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}
\end{aligned}$$

$$(\forall x \in X).$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X |fg| d\mu \\
&\leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int_X |f|^p d\mu \\
&\quad + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int_X |g|^q d\mu = 1.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

ii. Áp dụng Định lí 2.2ii. cho $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$,

$b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} &\geq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \\
&\quad + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}
\end{aligned}$$

$$(\forall x \in X).$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X |fg| d\mu \\ & \geq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int_X |f|^p d\mu \\ & \quad + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int_X |g|^q d\mu = 1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\|fg\|_1 \geq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Nhận xét 2.4.

Từ Định lý 2.3i. ta suy ra với $p > 1$, nếu $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$ thì $fg \in L^1(\mu)$.

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ MỞ RỘNG VÀ CẢI TIẾN BẤT ĐẲNG THỨC YOUNG

Mục này sẽ trình bày kết quả tổng quát hóa của bất đẳng thức Young trong Định lý 2.2i. và kết quả cải tiến của bất đẳng thức Young. Các kết quả này sẽ được áp dụng vào không gian L^p để cải tiến bất đẳng thức Rogers – Hölder ở mục sau.

Định lý 3.1.

Cho $x_1, \dots, x_n \geq 0$ và $p_1, \dots, p_n > 1$ sao cho $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$. Chứng minh rằng

$$\prod_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k^{p_k}}{p_k}.$$

Chứng minh:

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

- Hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Theo bất đẳng thức Young (Định lý 2.2), bất đẳng thức đúng với $n = 2$.

- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = m$ ($m \geq 2$), tức là với $p_1, \dots, p_m > 1$ sao cho $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ ta có

$$\prod_{k=1}^m x_k \leq \sum_{k=1}^m \frac{x_k^{p_k}}{p_k}.$$

- Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = m + 1$, tức là với $p_1, \dots, p_m, p_{m+1} > 1$ sao cho $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_{m+1}} = 1$ ta cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\prod_{k=1}^{m+1} x_k \leq \sum_{k=1}^{m+1} \frac{x_k^{p_k}}{p_k}.$$

Thật vậy: Đặt

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}.$$

Khi đó ta có $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_{m+1}} = 1$ và

$$\frac{p}{p_1} + \dots + \frac{p}{p_m} = 1.$$

Bởi giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m+1} x_k & \leq \frac{(x_1 \dots x_m)^p}{p} \\ & \quad + \frac{x_{m+1}^{p_{m+1}}}{p_{m+1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Lại áp dụng giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} (x_1 \dots x_m)^p & = x_1^p \dots x_m^p \\ & \leq \frac{(x_1^p)^{\frac{p_1}{p}}}{\frac{p_1}{p}} + \dots + \frac{(x_m^p)^{\frac{p_m}{p}}}{\frac{p_m}{p}} \\ & = p \left(\frac{x_1^{p_1}}{p_1} + \dots + \frac{x_m^{p_m}}{p_m} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\prod_{k=1}^{m+1} x_k \leq \sum_{k=1}^{m+1} \frac{x_k^{p_k}}{p_k}.$$

Vậy định lí được chứng minh.

Ví dụ: Áp dụng Định lý 3.1 cho trường hợp $p_1 = \dots = p_n = n$ và $x_i = \sqrt[n]{a_i}, i = 1, 2, \dots, n$ ta sẽ nhận được bất đẳng thức Cauchy quen thuộc

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

Định lí 3.2.

Cho $1 < p \leq 2$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó, với mọi $a, b \geq 0$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{q}{2}} \right)^2 &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \\ &\leq \frac{1}{p} \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{q}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Chứng minh:

- Nếu $p = q = 2$ thì các bất đẳng thức cần chứng minh xảy ra dấu “=”.

- Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì các bất đẳng thức cần chứng minh cũng xảy ra dấu “=”.

- Ta xét trường hợp $1 < p < 2$ và $a, b > 0$:

+ Ta chứng minh bất đẳng thức thứ nhất

$$\frac{1}{q} \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{q}{2}} \right)^2 \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{2-p}{p} a^p + \frac{2}{q} a^{\frac{p}{2}} b^{\frac{q}{2}} - ab \geq 0.$$

Cố định $1 < p < 2$ và $a > 0$. Xét hàm số sau

$$f(b) = \frac{2-p}{p} a^p + \frac{2}{q} a^{\frac{p}{2}} b^{\frac{q}{2}} - ab \quad (b > 0).$$

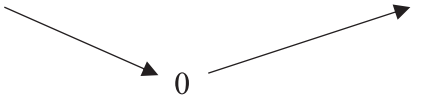
Ta có

$$f'(b) = a^{\frac{p}{2}} b^{\frac{q}{2}-1} - a.$$

Suy ra

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = a^{p-1}.$$

Ta có bảng biến thiên sau

B	0	a^{p-1}	$+\infty$
$f'(b)$	-	0	+
$f(b)$			

Từ đó suy ra

$$f(b) \geq 0 \quad (\forall b > 0).$$

Tức là

$$\frac{1}{q} \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{q}{2}} \right)^2 \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$

+ Ta chứng minh bất đẳng thức thứ hai

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \leq \frac{1}{p} \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{q}{2}} \right)^2.$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{2-p}{p} b^q - \frac{2}{p} a^{\frac{p}{2}} b^{\frac{q}{2}} + ab \geq 0.$$

Cố định $1 < p < 2$ và $b > 0$. Xét hàm số sau

$$f(a) = \frac{2-p}{p} b^q - \frac{2}{p} a^{\frac{p}{2}} b^{\frac{q}{2}} + ab \quad (a > 0).$$

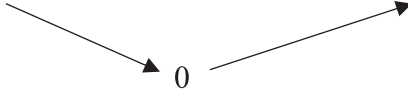
Ta có

$$f'(a) = -a^{\frac{p}{2}-1}b^{\frac{q}{2}} + b.$$

Suy ra

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = b^{q-1}.$$

Ta có bảng biến thiên sau

A	0	b^{q-1}	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$			

Từ đó suy ra

$$f(a) \geq 0 \quad (\forall a > 0).$$

Tức là

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \leq \frac{1}{p} \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{q}{2}} \right)^2.$$

Nhận xét 3.3.

Bất đẳng thức Young trong Định lí 2.2i. là hệ quả của bất đẳng thức thứ nhất trong Định lí 3.2.

4. MỘT SỐ KẾT QUẢ CẢI TIẾN BẤT ĐẲNG THỨC ROGERS – HÖLDER

Trong mục này, ta sẽ cải tiến bất đẳng thức Rogers – Hölder trong Định lí 2.3. Với $1 < p < \infty$ và $f \in L^p(\mu)$ ta có thể kiểm tra đẳng thức sau đây

$$\|f\|_p^{\frac{p}{2}} = \| |f|^{\frac{p}{2}} \|_2,$$

tức là $f^{\frac{p}{2}} \in L^2(\mu)$. Ta ký hiệu $f_+ = \max(f, 0)$ và $f_+^t = (\max(f, 0))^t$.

Định lí 4.1.

Cho $1 < p < \infty$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Cho $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$ sao cho

$\|f\|_p, \|g\|_q > 0$. Khi đó ta có các mệnh đề sau

i. Nếu $1 < p \leq 2$ thì

$$\begin{aligned} \|f\|_p \|g\|_q & \left(1 - \frac{1}{p} \left\| \frac{|f|^{\frac{p}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}} - \frac{|g|^{\frac{q}{2}}}{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}} \right\|_2^2 \right) \\ & \leq \|fg\|_1 \\ & \leq \|f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{1}{q} \left\| \frac{|f|^{\frac{p}{2}}}{\|fg\|_p^{\frac{p}{2}}} - \frac{|g|^{\frac{q}{2}}}{\|fg\|_q^{\frac{q}{2}}} \right\|_2^2 \right). \quad (*)$$

ii. Nếu $2 \leq p < \infty$ thì ta có dãy bất đẳng thức (*) với vai trò p và q đổi cho nhau.

Chứng minh: i.- Theo bất đẳng thức thứ nhất trong Định lí 3.2 ta có

$$\frac{1}{q} \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{q}{2}} \right)^2 \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$

Áp dụng bất đẳng thức này cho $a = |tf|$,

$b = |g|$ với hằng số $t > 0$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \left(|tf|^{\frac{p}{2}} - |g|^{\frac{q}{2}} \right)^2 \\ \leq \frac{|tf|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} - |tfg|. \end{aligned}$$

Lấy tích phân trên X theo độ đo μ hai vế của bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \left\| |tf|^{\frac{p}{2}} - |g|^{\frac{q}{2}} \right\|_2^2 \\ \leq \frac{t^p}{p} \|f\|_p^p + \frac{\|g\|_q^q}{q} - t \|fg\|_1. \quad (**) \end{aligned}$$

Chọn $t = \frac{\|g\|_q^{\frac{1}{p-1}}}{\|f\|_p}$, khi đó ta có

$$t^{\frac{p}{2}} = \frac{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}} \quad \text{và} \quad t^p = \frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}.$$

Thay vào bất đẳng thức (**) và biến đổi ta thu được

$$\begin{aligned} & \|fg\|_1 \\ & \leq \|f\|_p \|g\|_q \\ & \left(1 - \frac{1}{q} \left\| \frac{|f|^{\frac{p}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}} - \frac{|g|^{\frac{q}{2}}}{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}} \right\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

- Theo bất đẳng thức thứ hai trong Định lí 3.2 ta có

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \leq \frac{1}{p} \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{q}{2}} \right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức này cho $a = |tf|$, $b = |g|$ với hằng số $t > 0$ ta có

$$\begin{aligned} & \frac{|tf|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} - |tf|g| \\ & \leq \frac{1}{p} \left(|tf|^{\frac{p}{2}} - |g|^{\frac{q}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Lấy tích phân trên X theo độ đo μ hai vế của bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} & \frac{t^p}{p} \|f\|_p^p + \frac{\|g\|_q^q}{q} - t \|fg\|_1 \\ & \leq \frac{1}{p} \left\| |tf|^{\frac{p}{2}} - |g|^{\frac{q}{2}} \right\|_2^2. \quad (***) \end{aligned}$$

Chọn $t = \frac{\|g\|_q^{\frac{1}{p-1}}}{\|f\|_p}$, khi đó ta có

$$t^{\frac{p}{2}} = \frac{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}} \quad \text{và} \quad t^p = \frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}.$$

Thay vào bất đẳng thức (***) và biến đổi ta thu được

$$\begin{aligned} & \|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{1}{p} \left\| \frac{|f|^{\frac{p}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}} - \frac{|g|^{\frac{q}{2}}}{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}} \right\|_2^2 \right) \\ & \leq \|fg\|_1. \end{aligned}$$

Do $\|fg\|_1 \geq 0$ nên ta suy ra

$$\begin{aligned} & \|f\|_p \|g\|_q \left(1 - \frac{1}{p} \left\| \frac{|f|^{\frac{p}{2}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{2}}} - \frac{|g|^{\frac{q}{2}}}{\|g\|_q^{\frac{q}{2}}} \right\|_2^2 \right) + \\ & \leq \|fg\|_1. \end{aligned}$$

Vậy các bất đẳng thức (*) được chứng minh.

ii. Với $2 \leq p < \infty$ thì ta suy ra $1 < q \leq 2$. Khi đó, trong trường hợp i. ta đổi vai trò của p và q cho nhau ta sẽ thu được kết luận như trong ii.

5. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày một số kết quả mở rộng và cải tiến của bất đẳng thức Young và ứng dụng của bất đẳng thức đó trong không gian L^p . Các kết quả ở đây được chứng minh dựa trên các công cụ của toán sơ cấp. Vì vậy, kết quả của bài báo là khá hữu ích đối với các bạn sinh viên và học viên cả chuyên ngành toán và các chuyên ngành khác cần sự ứng dụng của các kiến thức toán học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Constantin P. Niculescu, Lars-Erik Persson (2005), *Convex Functions and their applications*, Springer.
- [2] Lars Homander (1994), *Notions of Convexity*, Birkhauser Boston.
- [3] Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- [4] E. Hewit, K. Stromberg (1965), *Real and abstract analysis*, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

Liên hệ:

Hồ Nguyễn Nhật Linh

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

Địa chỉ: 459 Tôn Đức Thắng, phường Hòa Khánh Nam, quận Liên Chiểu, Đà Nẵng

Email: lho172801@gmail.com

Ngày nhận bài: 29/9/2022

Ngày gửi phản biện: 02/10/2022

Ngày duyệt đăng: 27/11/2022