

ABOUT A SOLUTION TO DETERMINE THE SOLUTION FOR THE CONTROL SYSTEM

VỀ MỘT PHƯƠNG ÁN XÁC ĐỊNH NGHIỆM CHO HỆ ĐIỀU KHIỂN

Lê Hải Trung, Trần Ngọc Tâm

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

ABSTRACT: The article proposes a way to determine the state function $x(t)$ of a dynamic control system which is represented as a system of first-order differential equations. The state function $x(t)$ is built as the sum of a polynomial function and a rational function that depends on the time variable, the coefficients of the state function are determined through the initial constraint conditions.

Keywords: Control system, state function, rational function.

TÓM TẮT: Bài báo đề xuất một phương án xác định hàm trạng thái $x(t)$ của hệ điều khiển động lực học được biểu diễn dưới dạng hệ phương trình vi phân cấp một. Hàm trạng thái $x(t)$ được xây dựng dưới dạng tổng của hàm đa thức và hàm hữu tỉ phụ thuộc vào biến thời gian, các hệ số của hàm trạng thái được xác định thông qua các điều kiện ràng buộc ban đầu.

Từ khoá: Hệ điều khiển, hàm trạng thái, hàm hữu tỉ.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tiến hành xem xét hệ mô tả có dạng:

$$x'(t) = B(t)x(t) + D(t)u(t) + f(t) \quad (1.1)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $f(t) \in \mathbb{R}^n$, còn $B(t)$, $D(t)$ là các ma trận với cỡ thích hợp tương ứng, $t \in [t_0, t_k]$.

Đối với hệ (1.1) ta xây dựng phương án để giải quyết vấn đề sau đây: Ta cần xây dựng hàm trạng thái $x(t)$ để từ đó suy ra hàm điều khiển $u(t)$ tại các thời điểm $t_i, i = \overline{0, k}$, trong đó $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$, với hàm trạng thái $x(t)$ thỏa mãn các điều kiện:

$$x(t_i) = x_i^{00}. \quad (1.2)$$

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Kí hiệu $C(t): \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^s$, khi đó với mọi $Pv(t) \in \ker C(t)$ $t \in [t_0, t_k]$ ta có được khai triển sau đây:

$$\mathbb{R}^v = \text{coim}C(t) \oplus \ker C(t),$$

$$\mathbb{R}^s = \text{co} \ker C(t) \oplus \text{im}C(t),$$

ở đây $\text{coim}C(t)$ là phần bù trực tiếp của $\ker C(t)$ trong $\mathbb{R}^v$, $\text{co} \ker C(t)$ là phần bù trực tiếp của $\text{im}C(t)$ trong $\mathbb{R}^s$ và $\tilde{C}(t)$ là ma trận co lên $\text{coim}C(t)$ có ma trận nghịch đảo là $\tilde{C}^{-1}(t)$. Tiếp theo ta đưa vào các kí hiệu sau đây: $Q(C(t))$ - phép chiếu lên $\text{co} \ker C(t)$, $P(C(t))$ - phép chiếu lên $\ker C(t)$, $C^{-}(t) = (I - Q(t))\tilde{C}^{-1}(t)$. Sử

dùng bổ đề sau đây (xem [3]).

Bổ đề 1.1. Phương trình

$C(t)v(t) = w(t)$, $v(t) \in \mathbb{R}^v$, $w(t) \in \mathbb{R}^s$
tương đương với hệ:

$$\begin{cases} Q(C)w(t) = 0 \\ v(t) = C^-(t)w(t) + P(C)v(t), \end{cases}$$

ở đây $Pv(t) \in \ker C(t)$.

Phương pháp phân tách từng phần đã được nghiên cứu và đề cập trong các công trình [3]-[5] với ý nghĩa cơ bản là việc sử dụng Bổ đề 1.1 ta có thể chuyển được phương trình ban đầu dạng $C(t)v(t) = w(t)$ thành các phương trình trong các không gian con $\text{im}C(t)$ và $\text{co} \ker C(t)$, trong đó phương trình nhận được trong $\text{co} \ker C(t)$ là đồng dạng với phương trình gốc.

Giả sử $D(t)$ là toàn ánh $\forall t \in [t_0, t_k]$, $Q(D)$ là liên tục, khi đó ta viết lại hệ (1.1) dưới dạng:

$$D(t)u(t) = x'(t) - B(t)x(t) - f(t) \quad (2.1)$$

và áp dụng Bổ đề 1.1 với $D(t) = C(t)$, khi đó hệ (1.1) được biểu diễn thành các phương trình tương ứng trên các không gian con $\text{co} \ker D(t)$ và $\text{im}D(t)$ lần lượt là:

$$Q(D)[x'(t) - B(t)x(t) - f(t)] = 0, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (2.2)$$

$$u(t) = D^-(t)[x'(t) - B(t)x(t) - f(t)] + z(t), \quad z(t) \in \ker D(t) \quad (2.3)$$

Quan hệ được mô tả bởi (2.2) cho phép xác định $x(t)$ thỏa mãn điều kiện cần, còn phương trình (2.3) được

sử dụng để giải xác định hàm điều khiển $u(t)$. Ta viết lại (2.2) như sau:

$$Q(D)x'(t) = Q(D)B(t)x(t) + Q(D)f(t), \quad (2.4)$$

hay

$$\begin{aligned} Q(D)B(t)x(t) &= \\ &= Q(D)B(t)[(I - Q(D))x(t) + Q(D)x(t)]. \end{aligned}$$

Ta đưa vào các kí hiệu sau đây:

$$\begin{aligned} D_1(t) &= Q(D)B(t)[I - Q(D)], \\ f^1(t) &= Q(D)f(t), \quad B_1(t) = Q(D)B(t)Q(D), \\ Q(D)x(t) &= x^1(t), \quad y^1(t) = (I - Q(D))x(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

khi đó phương trình (2.2) được viết lại dưới dạng:

$$x^1(t) = B_1(t)x^1(t) + D_1(t)y^1(t) + f^1(t). \quad (2.6)$$

Như vậy, tại bước thứ nhất, hàm trạng thái $x(t)$ trong phương trình (1.1) được thay thế bởi:

$$x(t) = x_1(t) + y_1(t) \quad (2.7)$$

Hệ (2.7) có thể xem như một hệ điều khiển với các hàm tựa trạng thái và tựa điều khiển tại bước thứ nhất của quá trình phân tách, tương ứng là $x_1(t)$ và $y_1(t)$.

Trong thực hành, việc xác định cấu trúc của các phép chiếu lên các không gian con và việc xác định các ma trận tựa nghịch đảo là không hề dễ dàng, tuy nhiên với những gì đã cho thấy thì công việc trên có thể giải quyết được bằng một hướng đơn giản hơn.

Từ phương trình của hệ (1.1) trong đó chứa thành phần $u(t)$, bằng cách sử dụng Bổ đề 1.1 ta chuyển hệ ban đầu về hệ (2.5) (biểu diễn được

$u(t)$ qua $x(t)$ và $x'(t)$) mà ta không cần phải đi xây dựng ma trận $D^-(t)$. Điều này có nghĩa là ta đã thiết lập được mối quan hệ của $u(t)$ đối với các thành phần còn lại trong hệ (1.1). Bằng phép biến đổi như đã mô tả ở trên đối với các thành phần của $x(t)$, ta chuyển được phương trình (2.2) về dạng:

$$L(t)x'(t) = H(t)x(t) + f^1(t) \quad (2.8)$$

với $L(t)$ và $H(t)$ là các ma trận, còn $f^1(t)$ là hàm véc-tơ. Ta có hệ:

$$\begin{cases} L(t)x(t) = x^1(t) \\ G(t)x(t) = y^1(t), \end{cases} \quad (2.9)$$

trong đó $G(t)$ là ma trận sao cho hệ (2.9) là giải được duy nhất theo $x(t)$. Trong mối quan hệ giữa $u(t)$ thông qua $x(t)$ và $x'(t)$ trong (2.2) thì $L(t) = Q(D)$, $G(t) = I - Q(D)$. Việc biểu diễn nghiệm $x(t)$ trong phương trình (2.8) được thông qua các thành phần $x^1(t)$ và $y^1(t)$ từ hệ (2.9) để rồi sau đó nhận được phương trình (2.6):

$$x^1(t) = B_1(t)x^1(t) + D_1(t)y^1(t) + f^1(t) \quad (2.10)$$

Tại bước phân tách đầu tiên thì ta có được các trường hợp sau đây đối với $D_1(t)$:

- $D_1(t) \equiv 0$.
- $D_1(t)$ là một ma trận toàn ánh hay $Q(D_1) \equiv 0$.
- $D_1(t)$ là một ma trận không toàn ánh $\forall t \in [t_0; t_k]$.

Trong trường hợp thứ nhất (a) khi $D_1(t) \equiv 0$ thì hệ (1.1) là không điều khiển được một cách đầy đủ, vì khi đó nghiệm $x_1(t)$ của phương trình (2.10):

$$x^1(t) = B_1(t)x^1(t) + f^1(t)$$

sẽ không thỏa mãn điều kiện:

$$x^1(t_i) = L(t_i)x(t_i) = L(t_i)x_i^{00}. \quad (2.11)$$

Trong trường hợp thứ 2 (b) khi mà không có $\text{co ker } D_1(t)$, $Q(D_1) = 0$ thì ta cần thực hiện các bước tiếp theo đây để giải quyết bài toán:

+ Thiết lập các điều kiện của $x^1(t_i)$ bằng cách sử dụng các quan hệ (2.8) và (2.9):

$$x^1(t_i) = B_1(t_i)L(t_i)x_i^{00} + D_1(t_i)G(t_i)x_i^{00} + f_1(t_i). \quad (2.12)$$

+ Các điều kiện mới xuất hiện với hàm véc-tơ $x^1(t)$ thông qua các phương trình (2.8) – (2.9) được kí hiệu bởi:

$$x^1(t_i) = x_i^{10}, \quad x^1(t_i) = x_i^{11}, \quad (2.13)$$

ở đây $x^1(t)$ có thể được cấu trúc bởi các tổ hợp tuyến tính của các hàm độc lập tuyến tính vô hướng với các hệ số véc-tơ được xác định từ điều kiện (2.13).

+ Từ phương trình (2.10) ta xác định được $y^1(t)$:

$$y^1(t) = D_1^-(x^1 - B_1(t)x^1(t) - f^1(t)) + z^1(t) \quad (2.14)$$

với $z^1(t) = P(D_1)y^1(t)$ là một phần tử trong $\text{ker } D_1$ và thỏa mãn điều kiện:

$$z^1(t_i) = P(D_1(t_i))G(t_i)x_i^{00}, \quad (2.15)$$

nhận được từ (2.9). Việc xác định hàm trạng thái $x(t)$ được thông qua (2.9), còn hàm điều khiển $u(t)$ được xác định bởi phương trình (1.1).

Trong trường hợp thứ 3 (c) khi $D_1(t)$ là không toàn ánh, điều này dẫn đến việc ta phải đi đến các bước tiếp theo để xác định các hàm tựa trạng thái $x^1(t)$ và tựa điều khiển $y^1(t)$ bằng cách liên kết phương trình (2.10) với điều kiện (2.13). Lúc này hệ (2.10) là đồng dạng như hệ (1.1). Các quá trình như đã trình bày ở trên được lặp lại đối với phương trình (2.10) cho đến bước thứ p nào đấy ($p \in \mathbb{N}$) ta nhận được:

$$\begin{cases} L_{p-1}(t)x^{p-1}(t) = x^p(t), \\ G_{p-1}(t)x^{p-1}(t) = y^p(t), \end{cases} \quad (2.16)$$

và

$\dot{x}^p = B_p(t)x^p(t) + D_p(t)y^p(t) + f^p(t)$, (2.17) trong đó $D_p(t)$ là ma trận 0 hoặc toàn ánh. Nếu $D_p(t) = 0$ thì ta kết luận được hệ (1.1) là không điều khiển được. Trong điều kiện $D_p(t)$ là toàn ánh thì ta thực hiện các biến đổi đại số đối với những điều kiện tựa như (2.13) để tại bước thứ p này ta nhận được các điều kiện bổ sung đến đạo hàm cấp k cho hàm tựa điều khiển $x^p(t)$:

$$\left. \frac{d^j x_p(t)}{dt^j} \right|_{t=t_i} = x_i^{pj}, j = \overline{0, p}, i = \overline{0, k}. \quad (2.18)$$

Tại đây $y^p(t)$ được xác định bởi:

$$y^p(t) = D_p^-(x^p(t) - B_p(t)x^p(t) - f^p(t)) + z^p(t), \quad (2.19)$$

$z^p(t) = p(D_p)y^p(t)$ là một phần tử trong $\ker D_p$ và thỏa mãn điều kiện:

$$z^p(t_i) = P(D_p(t_i))G_{p-1}(t_i)x^{p-1}(t_i), i = \overline{0, k}. \quad (2.20)$$

Các hàm $x^p(t)$ và $y^p(t)$ xây dựng được tại bước thứ p được sử dụng để xác định các hàm $x^{p-1}(t)$ và $y^{p-1}(t)$ bằng cách hoán đổi $p-1$ bằng p , cứ tiếp tục như thế ta xác định được $x^{p-2}(t), y^{p-2}(t) \dots$ cuối cùng, tại hệ (2.9) ta xác định được $x(t)$ còn $u(t)$ được xác định thông qua (2.3). Đối với hàm $z^j(t) = P(D_j)y^j(t)$ cần điều kiện trơn và thỏa mãn điều kiện:

$$z^j(t_i) = P(D_j)G_{j-1}(t_i)x^{j-1}(t_i).$$

3. ÁP DỤNG

Ví dụ 3.1. Xét $t \in [0, 2]$ và hệ điều khiển cho bởi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + f(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t}, & t \in (0, 2] \\ 0, & t=0 \end{cases} \quad (3.2)$$

với điều kiện đầu cho bởi:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= b_0, x_1(1) = a_1, x_1(2) = a_2, \\ x_2(0) &= b_0, x_2(1) = b_1, x_2(2) = b_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tại bước thứ nhất, tương ứng với $p=1$, ta xây dựng được hàm $x_2(t)$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{aligned}x_2'(0) &= a_0, x_2'(1) = a_1, x_2'(2) = a_2, \\x_2(0) &= b_0, x_2(1) = b_1, x_2(2) = b_2.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Từ (3.4) và phương trình thứ hai của hệ (3.1) ta xây dựng:

$$x_2(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{(1+t)^i} + \sum_{i=4}^7 c_i t^{i-4}.$$

Lúc này, các hệ số c_i được xác định từ các điều kiện (3.4) và bổ sung thêm điều kiện của hàm $f(t)u(t)$ tại $t=0$, hay $f(0)u(0) = x_2''(0) - x_2(0)$. Từ phương trình thứ hai của hệ (3.1) ta có:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \sum_{i=1}^3 \frac{-ic_i}{(1+t)^{i+1}} + \sum_{i=4}^7 (i-4)c_i t^{i-5}, \\x_1'(t) &= \sum_{i=1}^3 \frac{(i+1)ic_i}{(1+t)^{i+2}} + \sum_{i=4}^7 (i-5)(i-4)c_i t^{i-6}.\end{aligned}$$

Tiến hành tính toán ta thu được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} -c_1 - 2c_2 - 3c_3 + c_5 = a_0 \\ -\frac{1}{4}c_1 - \frac{1}{4}c_2 - \frac{3}{16}c_3 + c_5 = a_1 \\ -\frac{1}{9}c_1 - \frac{2}{27}c_2 - \frac{1}{27}c_3 + 6c_6 + 12c_7 = a_2 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = b_0 \\ \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{8}c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = b_1 \\ \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{9}c_2 + \frac{1}{27}c_3 + c_4 + 2c_5 + 4c_6 + 8c_7 = b_2 \\ 2c_1 + 6c_2 + 12c_3 = b_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{14554}(-9234a_0 + 132192a_1 - 25110a_2 + 113855b_0 - 132192b_1 + 4617b_2) \\ c_2 = -\frac{3}{14554}(12654a_0 + 39456a_1 - 2358a_2 + 44938b_0 - 39456b_1 - 6327b_2) \\ c_3 = \frac{18}{7277}(570a_0 + 1032a_1 + 18a_2 + 1379b_0 - 1032b_1 - 285b_2) \\ c_4 = \frac{1}{12554}(26676a_0 - 50976a_1 - 17388a_2 - 14131b_0 - 50976b_1 - 13338b_2) \\ c_5 = \frac{1}{14554}(-9044a_0 + 6912a_1 - 9018a_2 - 6841b_0 - 6912b_1 + 11799b_2) \\ c_6 = \frac{1}{29108}(-23332a_0 + 9232a_1 + 5238a_2 - 35331b_0 + 48984b_1 - 17442b_2) \\ c_7 = \frac{1}{58216}(22306a_0 - 6800a_1 - 1134a_2 + 36832b_0 - 51416b_1 + 17955b_2) \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ (3.1) ta xác định được:

$$\begin{aligned}u(t) &= \frac{x_1'(t) - x_2(t)}{f(t)} = -c_1 - \frac{c_2}{1+t} + \\ &\frac{2c_1 - c_3}{(1+t)^2} + \frac{6c_2}{(1+t)^3} + \frac{12c_3}{(1+t)^4} + 2c_6 - c_4 \\ &+ (6c_7 - 2c_6 - c_5 - c_4)t + (6c_7 - c_6 - c_5)t^2 \\ &- (c_7 + c_6)t^3 - c_7t^4\end{aligned}$$

Đổi với hàm $u(t)$ như trên và với điều kiện đầu của $x_1(t), x_2(t)$ ta nhận được nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + v(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) \end{cases}$$

với $v(t) = f(t)u(t)$ là tồn tại và duy nhất trong tính trơn của $v(t)$ và thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Ta thấy rằng nếu xây dựng $x_2(t)$ dưới dạng phân số nêu trên thì giá trị định thức của hệ phương trình để xác định c_i trong trường hợp này là khá nhỏ (bằng 1.633×10^{-9}). Trong thực tế ta có thể kết hợp việc sử dụng hàm phân số với hàm dạng khác (như đa thức chẳng hạn) để mô tả các hàm quỹ đạo.

Bây giờ, ta thử đặt vấn đề khi bổ sung thêm điều kiện $x_2''(t) = x_1'(t)$ đối với ví dụ đã xét, khi đó các hệ số c_i là thay đổi như thế nào? Ta viết các điều kiện như sau:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= b_0, x_1(1) = a_1, x_1(2) = a_2, \\ x_2(0) &= b_0, x_2(1) = b_1, x_2(2) = b_2, \\ x_1'(0) &= d_0, x_1'(1) = d_1, x_1'(2) = d_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tại bước thứ nhất, tương ứng với $p=1$, ta xây dựng được $x_2(t)$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{aligned} x_2'(0) &= a_0, x_2'(1) = a_1, x_2'(2) = a_2, \\ x_2(0) &= b_0, x_2(1) = b_1, x_2(2) = b_2, \\ x_2''(0) &= d_0, x_2''(1) = d_1, x_2''(2) = d_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Từ (3.6) và phương trình thứ hai của hệ (3.1) ta xây dựng $x_2(t)$ dưới dạng:

$$x_2(t) = \sum_{i=1}^5 \frac{c_i}{(1+t)^i} + \sum_{i=6}^{10} c_i t^{i-6}.$$

Lúc này, các hệ số c_i được xác định từ các điều kiện (4) và bổ sung

thêm điều kiện của hàm $f(t)u(t)$ tại $t=0$ hay

$$f(0)u(0) = x_2''(0) - x_2(0) \Leftrightarrow d_0 = b_0.$$

Từ phương trình thứ hai của hệ (3.1) ta xác định được:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{i=1}^5 \frac{-ic_i}{(1+t)^{i+1}} + \sum_{i=6}^{10} (i-6)c_i t^{i-7}, \\ x_1'(t) &= \sum_{i=1}^5 \frac{(i+1)ic_i}{(1+t)^{i+2}} + \sum_{i=6}^{10} (i-7)(i-6)c_i t^{i-8}. \end{aligned}$$

Tiến hành tính toán ta thu được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = b_0 \\ \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{8}c_3 + \frac{1}{16}c_4 + \frac{1}{16}c_5 + \frac{1}{32}c_6 + c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} = b_1 \\ \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{9}c_2 + \frac{1}{27}c_3 + \frac{1}{81}c_4 + \frac{1}{243}c_5 + c_6 + 2c_7 + 4c_8 + 8c_9 + 16c_{10} = b_2 \\ -c_1 - 2c_2 - 3c_3 - 4c_4 - 5c_5 + c_7 = a_0 \\ -\frac{1}{4}c_1 - \frac{1}{4}c_2 - \frac{3}{16}c_3 - \frac{1}{8}c_4 - \frac{5}{64}c_5 + c_7 + 2c_8 + 3c_9 + 4c_{10} = a_1 \\ -\frac{1}{9}c_1 - \frac{2}{27}c_2 - \frac{3}{81}c_3 - \frac{4}{243}c_4 - \frac{5}{729}c_5 + c_7 + 4c_8 + 12c_9 + 32c_{10} = a_2 \\ 2c_1 + 6c_2 + 12c_3 + 20c_4 + 30c_5 + 2c_6 = d_0 \\ \frac{1}{4}c_1 + \frac{3}{8}c_2 + \frac{3}{8}c_3 + \frac{5}{16}c_4 + \frac{15}{64}c_5 + 2c_6 + 6c_7 + 12c_{10} = d_1 \\ \frac{2}{27}c_1 + \frac{6}{81}c_2 + \frac{12}{243}c_3 + \frac{20}{729}c_4 + \frac{10}{729}c_5 + 2c_6 + 12c_7 + 48c_{10} = d_2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta thu được các hệ số c_i với $i = \overline{1,9}$ như sau:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2389206712} (456501488766a_0 + 675069973440a_1 + 475118594622a_2 + 1606943338119b_0 - 1610166929664b_1 + 1738436418b_2 + 31428697693d_0 - 683314291264d_1 - 169207322490d_2) \\ c_2 &= \frac{1}{7167620136} (-1017069159750a_0 - 1352800600512a_1 - 1292936795622a_2 - 3655762519543b_0 + 3655806223872b_1 + 3500166006b_2 - 68714161537d_0 + 1707164350528d_1 + 470570807826d_2) \\ c_3 &= \frac{3}{1194603356} (15571324194a_0 + 18825850752a_1 + 22717172250a_2 + 56944827355b_0 - 56823313728b_1 - 145516734b_2 + 1035707329d_0 - 28440279424d_1 - 8371207926d_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= \frac{9}{298650839} (13414017a_0 + 177331584a_1 \\
&\quad - 545368545a_2 - 346505524b_0 + 347140272b_1 + 3741336b_2 \\
&\quad + 9769889d_0 + 517163488d_1 + 211031325d_2) \\
c_5 &= \frac{9}{298650839} (9286806a_0 + 118269120a_1 - 363438738a_2 \\
&\quad - 230843443b_0 + 229425600b_1 + 3228606b_2 \\
&\quad + 7642151d_0 + 344077696d_1 + 140561406d_2) \\
c_6 &= \frac{1}{1791905034} (-157956916116a_0 - 249629285280a_1 \\
&\quad - 145156231764a_2 - 551972444141b_0 \\
&\quad + 555735145344b_1 - 1496356092b_2 - 10938768014d_0 \\
&\quad + 223022520992d_1 + 50738601204d_2) \\
c_7 &= \frac{1}{7167620136} (181825313202a_0 + 310720820928a_1 + \\
&\quad 144894079962a_2 + 634395506737b_0 \\
&\quad - 639496829568b_1 + 4612117806b_2 + \\
&\quad 12598304755d_0 - 246614603584d_1 - 49050326142d_2) \\
c_8 &= \frac{1}{597301678} (-92914560a_0 - 12977280a_1 \\
&\quad - 37878840a_2 - 341915549b_0 + 540336960b_1 - 198283140b_2 \\
&\quad - 6149911d_0 + 188449920d_1 + 34058880d_2) \\
c_9 &= \frac{1}{3583810068} (-8999995965a_0 - 17233368096a_1 \\
&\quad - 5753471391a_2 - 31608376777b_0 + 31270186656b_1 \\
&\quad + 358324398b_2 - 619426123d_0 + 12059498080d_1 \\
&\quad + 1485983394d_2) \\
c_{10} &= \frac{1}{28670480544} (14861194212a_0 + 29005877376a_1 \\
&\quad + 8902965960a_2 + 52376559175b_0 - 52045932864b_1 \\
&\quad - 362052342b_2 + 1019519263d_0 - 20102859904d_1 \\
&\quad - 1524476052d_2)
\end{aligned}$$

Như thế sau khi bổ sung thêm điều kiện $x_2''(t) = x_1'(t)$ thì các hệ số c_i đã được thay đổi lên 10 hệ số.

Từ phương trình thứ nhất của hệ (3.1) ta xác định được:

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{c_2}{t+1} + \frac{2c_1 - c_3}{(t+1)^2} + \frac{6c_2 - c_4}{(t+1)^3} \\
&\quad + \frac{12c_3 - c_5}{(t+1)^4} + \frac{20c_4}{(t+1)^5} + \frac{30c_5}{(t+1)^6} \\
&\quad - c_{10}t^5 - (c_{10} + c_9)t^4 + (12c_{10} - c_9 - c_8)t^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ (12c_{10} + 6c_9 - c_8 - c_7)t^2 + (6c_9 + 2c_8 - c_7 - c_6)t \\
&+ 2c_8 - c_6 - c_1
\end{aligned}$$

Đối với hàm $u(t)$ như trên và với điều kiện đầu của $x_1(t), x_1'(t), x_2(t)$ ta nhận được nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + v(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) \end{cases}$$

cùng với điều kiện bổ sung $x_2''(t) = x_1'(t)$.

Ví dụ 3.2. Xét quỹ đạo chuyển động của chất điểm dưới tác động của lực trọng trường được mô tả bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u_1(t) \\ x_3'(t) = x_4(t) \\ x_4'(t) = u_2(t) - g, \end{cases} \quad (3.7)$$

ở đây $x_1(t)$ là thành phần chuyển động của chất điểm theo phương ngang (trục hoành), $x_3(t)$ là thành phần chuyển động của chất điểm theo phương thẳng đứng (trục tung), $x_2(t), x_4(t)$ là các thành phần của vận tốc được chiếu theo phương ngang và phương thẳng đứng tương ứng. Để thấy hệ (3.7) có thể phân tách thành hai hệ độc lập:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u_1(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

và

$$\begin{cases} x_3'(t) = x_4(t) \\ x_4'(t) = u_2(t) - g. \end{cases} \quad (3.9)$$

Để xác định thành phần quỹ đạo theo phương ngang ta đưa vào các điều kiện tại bốn điểm: A_0 tại $t=0$, A_1 tại $t=1s$, A_2 tại $t=2s$ và A_3 tại $t=3s$ với các điều kiện cho bởi:

$$\begin{cases} x_1(0)=0, x_1(1)=0,8, x_1(2)=1,6, x_1(3)=2,4 \\ x_2(0)=0,6, x_2(1)=1,9, x_2(2)=0,8, x_2(3)=0,8 \end{cases} \quad (3.10)$$

với các đơn vị tương ứng là km và km/s .

Ta thấy rằng phương trình thứ hai trong hệ (3.9) là một đẳng thức như (2.3): $u_1(t) = x_2'(t)$ và phương trình đầu tiên trong (3.9) là phương trình như (2.4) hoặc (2.6) với $B_1 = 0$, $D_1 = 1$ hay tại $p = 1$. Đa thức $\sum_{i=0}^5 c_i t_i$ có thể được xây dựng cho $x_1(t)$ trên cơ sở sử dụng các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1(0)=0, x_1(1)=0,8, x_1(2)=1,6, x_1(3)=2,4 \\ x_1'(0)=0,6, x_1'(1)=1,9, x_1'(2)=0,8, x_1'(3)=0,8 \end{cases} \quad (3.11)$$

Các điều kiện trong (3.10) đối với $x_1'(t)$ được xác định thông qua việc sử dụng phương trình thứ nhất của hệ (3.7) và các điều kiện của $x_2(t)$ và các điều kiện của $x_2(t)$ trong (3.10). Giá trị của đa thức $x_1(t)$ sau khi tính toán lần lượt là 10^{-17} tại $t=0$; $1,2 \times 10^{-8}$ tại $t=1$; $2,1 \times 10^{-12}$ tại $t=2$ và $1,56 \times 10^{-11}$ tại $t=3$.

Các giá trị của đa thức $x_2(t) = x_1'(t)$ sau khi tính toán lần lượt là 10^{-17} tại $t=0$; 4×10^{-13} tại $t=1$; 6×10^{-12} tại $t=2$ và $3,98 \times 10^{-11}$ tại

$t=3$. Đa thức $x_1(t)$ được xác định (sau khi làm tròn số) là:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0,6t - 0,167t^2 + 1,327t^3 - 1,625t^4 \\ &\quad + 0,85277t^5 - 0,20833t^6 + 0,0294t^7, \\ x_1' &= 0,6 - 0,33t + 3,98t^2 - 6,5t^3 \\ &\quad + 4,26t^4 - 1,25t^5 + 0,13t^6, \\ u_1(t) &= -0,33 + 7,98t - 19,5t^2 \\ &\quad + 17,1t^3 - 6,25t^4 + 0,82t^5. \end{aligned}$$

Các thành phần quỹ đạo chuyển động của chất điểm theo phương thẳng đứng được xác định bởi các phương trình thứ ba và thứ tư của hệ (3.7). Để xác định được quỹ đạo theo phương thẳng đứng ta đưa vào các điều kiện:

$$\begin{cases} x_3(0)=0, x_3(1)=0,5, x_3(2)=0, \\ x_3(2,5)=0, x_3(2,8)=0, x_3(3)=0, \\ x_4(0)=0,8, x_4(1)=0, x_4(2)=0, \\ x_4(2,5)=0,8, x_4(2,8)=0, x_4(3)=0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Phương trình thứ ba trong hệ (3.7) là phương trình như (2.4) hoặc (2.6) với $B_1 = 0$, $D_1 = 0$ hay tương ứng tại $p = 1$. Các điều kiện đối với $x_3(t)$ và $x_3'(t)$ được xác định từ (3.7) và (3.12):

$$\begin{cases} x_3(0)=0, x_3(1)=0,5, x_3(2)=0, \\ x_3(2,5)=0, x_3(2,8)=0, x_3(3)=0, \\ x_3'(0)=0,8, x_3'(1)=0, x_3'(2)=0, \\ x_3'(2,5)=0,8, x_3'(2,8)=0, x_3'(3)=0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Hàm $x_3(t)$ được xác định bởi:

$$x_3(t) = \sum_{i=0}^6 c_i \frac{2t}{i+7-2t} + \sum_{i=7}^{11} c_i t^{i-7}.$$

Tiến hành tính toán ta nhận được giá trị của $x_3(t)$ là 10^{-17} tại $t=0$ và

$t = 2.5$; 3.725×10^{-6} tại $t = 1$ và $t = 2$;
 1.49×10^{-5} tại $t = 2.8$ và $t = 3$ và:

$$x_3(t) = \frac{197.7t}{7-2t} - \frac{37104.9t}{4-t} + \frac{2987703.2t}{9-2t} \\ - \frac{16661765.2t}{5-t} + \frac{140797308.8t}{11-2t} - \frac{121442300.2t}{6-t} \\ + \frac{143844138.2t}{6-t} - 614671t - 61124t^2 \\ - 5294t^3 - 380.7t^4,$$

còn lại các hàm $x_4(t)$ và $u_2(t)$ được xác định từ các phương trình thứ ba và thứ tư của hệ (3.7).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. P. Zubova, E. V. Raetskaya, and Le Hai Trung (2008), “On polynomial solutions of the linear stationary control system”, *Autom. Remote Control* 69, (No. 11), 1852–1858.
- [2] S. P. Zubova and Le Hai Trung (2010), “Construction of polynomial controls for linear stationary system with control points and additional constrains”, *Autom. Remote Control* 71, (No.5), 971–975.
- [3] S. P. Zubova and E. V. Raetskaya (2018), “Construction of controls providing the desired output of the linear dynamic system”, *Autom. Remote Control* 79, (No.5), 774–79.
- [4] E. V. Raetskaya (2004), *Điều kiện điều khiển và quan trắc được*. Luận án tiến sĩ Toán – Lý. Đại học Tổng hợp quốc gia Voronezh (Tiếng Nga).
- [5] Lê Hải Trung, Hoàng Thị Thu Hải, Trần Ngọc Tâm, “Phương pháp phân tách cho bài toán điều khiển đa biến”, *Tạp chí khoa học và công nghệ, Đại học Quảng Bình*, 21.(03), 2021.

Liên hệ:

TS. Lê Hải Trung

Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

Địa chỉ: 459 Tôn Đức Thắng, quận Liên Chiểu, thành phố Đà Nẵng

Email: lhtrung@ued.udn.vn

Ngày nhận bài: 11/4/2022

Ngày gửi phản biện: 13/4/2022

Ngày duyệt đăng: 12/5/2022