

STRONG LAWS OF LARGE NUMBERS FOR SEQUENCES OF PAIRWISE M -DEPENDENT FUZZY RANDOM VARIABLES

LUẬT MẠNH SỐ LỚN CHO DÃY CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN MỜ M -PHỤ THUỘC ĐÔI MỘT

Hoàng Thị Duyên

Trường Đại học Quảng Bình

ABSTRACT: *In this paper, we establish strong laws of large numbers for sequences of identically distributed pairwise M -dependent fuzzy random variables in separable Banach space.*

Key words: *Fuzzy random variables, pairwise independent, pairwise M -dependent, expectation.*

TÓM TẮT: *Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập một số luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên mờ M -phụ thuộc đôi một cùng phân phối trong không gian Banach thực khả ly.*

Từ khóa: *Biến ngẫu nhiên mờ, độc lập đôi một, M -phụ thuộc đôi một, kỳ vọng.*

1. GIỚI THIỆU

Những nghiên cứu về biến ngẫu nhiên mờ đã được khởi xướng bởi Feron [4], Kwakernaak [7,8], Puri và Ralescu [6]. Đặc biệt, Puri và Ralescu [6] đã đưa ra khái niệm biến ngẫu nhiên mờ trong $\mathbb{R}^d$. Sau đó một số định lý giới hạn cho biến ngẫu nhiên mờ và những ứng dụng của nó đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, chẳng hạn, Kruse [10] đã chứng minh luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối. Klement, Puri và Ralescu [9] đã thu được luật mạnh số lớn và các định lý giới hạn cho dãy các biến ngẫu nhiên mờ độc lập và cùng phân phối trong không gian $\mathbb{R}^d$. Inoue [5] đã chứng minh luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên đa trị, tight, độc lập và các biến ngẫu nhiên mờ độc lập, cùng phân phối trong không gian

Banach thực khả ly. Li và Ogura [11] đã thu được luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên mờ trong hai trường hợp độc lập, compact khả tích đều và độc lập, cùng phân phối trong không gian Banach thực khả ly. Gần đây, Castaing, Godet-Thobie, Duyen và Raynaud de Fitte [2], Quang và Duyen [12, 13] đã nghiên cứu về biến ngẫu nhiên mờ trong không gian Suslin lồi địa phương và đưa ra một số ứng dụng về luật mạnh số lớn cho dãy và mảng các biến ngẫu nhiên mờ trong không gian Banach thực khả ly. Castaing, Duyen và Hess [3] đã nghiên cứu về biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc đôi một và thiết lập các loại hội tụ khác nhau cho dãy các biến ngẫu nhiên đa trị đó. Tuy nhiên cho đến nay luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên mờ dưới cấu trúc M -phụ thuộc vẫn chưa được nghiên cứu.

Mục đích của bài báo này là thiết lập luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên mờ M -phụ thuộc đôi một và cùng phân phối trong không gian Banach thực khả ly.

Trước hết chúng tôi xin giới thiệu một số kí hiệu, định nghĩa được sử dụng trong bài báo này. Cho $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ và $\mathbf{E}$ là không gian Banach thực khả ly. Ta kí hiệu $P(\mathbf{E})$ là họ tất cả các tập con khác rỗng của $\mathbf{E}$, $c(\mathbf{E})$ (tương ứng, $cc(\mathbf{E})$, $ck(\mathbf{E})$, $k(\mathbf{E})$) là họ gồm các tập con đóng (tương ứng, lồi đóng, compact lồi, compact) khác rỗng của $\mathbf{E}$ và $\mathfrak{B}(\mathbf{E})$ là σ -đại số Borel trên $\mathbf{E}$. Với $A, B \in k(\mathbf{E})$, khoảng cách Hausdorff của A và B được định nghĩa bởi

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right\}.$$

Ánh xạ $X: \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ từ Ω vào $P(\mathbf{E})$ được gọi là ánh xạ đa trị. Ánh xạ đa trị $X: \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ được gọi là ánh xạ $\mathfrak{F}$ -đo được nếu với mỗi $B \in \mathfrak{B}(\mathbf{E})$, ta có

$$X^-(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F}$$

Ánh xạ đa trị $X: \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ nhận giá trị trong $c(\mathbf{E})$ được gọi là biến ngẫu nhiên đa trị nếu X là ánh xạ $\mathfrak{F}$ -đo được. σ -đại số trên $c(\mathbf{E})$ được sinh bởi các tập

$$U^- = \{F \in c(\mathbf{E}) : F \cap U \neq \emptyset\},$$

với U là tập con mở của $\mathbf{E}$, gọi là σ -đại số Effros và được kí hiệu là $\mathfrak{B}_{c(\mathbf{E})}$.

Với X là biến ngẫu nhiên đa trị, ta kí hiệu $\mathfrak{F}_X = \{X^{-1}(U) : U \in \mathfrak{B}_{c(\mathbf{E})}\}$,

trong đó

$$X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in U\}.$$

Khi đó $\mathfrak{F}_X$ là σ -đại số con bé nhất của $\mathfrak{F}$ mà X đo được. Phân phối của X là một độ đo xác suất P_X trên $\mathfrak{B}_{c(\mathbf{E})}$ và được xác định bởi

$$P_X(\mathfrak{U}) = P(X^{-1}(\mathfrak{U}) : \mathfrak{U} \in \mathfrak{B}_{c(\mathbf{E})}).$$

Ta kí hiệu $L_{\mathbf{E}}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ là không gian Banach gồm các biến ngẫu nhiên $f: \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ sao cho $\|f\|_1 = E(\|f\|) < \infty$.

Nếu $\mathbf{E} = \mathbb{R}$ thì ta viết gọn $L_{\mathbb{R}}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ là L^1 . Ta đặt

$$S_X^1 = \{f \in L_{\mathbf{E}}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P) : f(\omega) \in X(\omega) \text{ h.c.c.}\}$$

Kỳ vọng EX của biến ngẫu nhiên đa trị X trên Ω được định nghĩa như sau

$$EX = \{Ef : f \in S_X^1\},$$

trong đó, Ef là tích phân Bochner thông thường của f . Biến ngẫu nhiên đa trị X được gọi là khả tích nếu tập $S_X^1 \neq \emptyset$. Ngoài ra, X được gọi là bị chặn khả tích nếu biến ngẫu nhiên thực

$$|X|(\omega) = \sup\{|x| : x \in X(\omega)\}$$

khả tích. Một biến ngẫu nhiên đa trị bị chặn khả tích thì khả tích nhưng chiều ngược lại không đúng.

Một dãy các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_n : n \geq 1\}$ được gọi là độc lập (tương ứng, độc lập đôi một) nếu dãy các σ -đại số sinh bởi chúng $\{\mathfrak{F}_{X_n} : n \geq 1\}$ độc lập (tương ứng, độc lập đôi một) và được gọi là cùng phân phối nếu tất cả các phân phối P_{X_i} của chúng đều bằng nhau.

Cho M là số nguyên không âm. Dãy các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_n : n \geq 1\}$ được gọi là M -phụ thuộc đôi một nếu $\{X_i, X_j\}$ độc lập khi $j - i > M$. Từ định nghĩa trên ta thấy rằng, dãy các biến ngẫu nhiên đa trị 0-phụ thuộc đôi một là độc lập đôi một.

Theo Zadeh [14], *tập mờ* là ánh xạ $u : \mathbf{E} \rightarrow [0, 1]$ sao cho:

- (i) u là ánh xạ nửa liên tục trên;
 - (ii) $\{x \in \mathbf{E} : u(x) = 1\} \neq \emptyset$;
 - (iii) u là hàm lồi mờ, nghĩa là, với mọi $\lambda \in [0, 1]$ và với mọi $x, y \in \mathbf{E}$, ta có
- $$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}.$$

Với mỗi tập mờ u trong $\mathbf{E}$, *tập α -mức* liên kết với u được định nghĩa bởi

$$u_\alpha = \{x \in \mathbf{E} : u(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Ta còn định nghĩa

$$u_{\alpha^+} = \text{cl}\{x \in \mathbf{E} : u(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1)$$

Cho u và v là hai tập mờ trong $\mathbf{E}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa các phép toán sau đây

$$(u + v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u(y), v(z)\}$$

$$\lambda u(x) = \begin{cases} u(\lambda^{-1}x), & \lambda \neq 0 \\ I_{\{0\}}(x), & \lambda = 0. \end{cases}$$

Theo [11], $u + v$ và λu là các tập mờ trong $\mathbf{E}$. Hơn nữa với mỗi $\alpha \in (0, 1]$ ta có $[u + v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha$, $[\lambda u]_\alpha = \lambda[u]_\alpha$.

Theo [2], *biến ngẫu nhiên mờ* là ánh xạ $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbf{E})$ -đo được $X : \Omega \times \mathbf{E} \rightarrow [0, 1]$ sao cho với mỗi $\omega \in \Omega$, ánh xạ $X(\omega, \cdot) : \mathbf{E} \rightarrow [0, 1]$ xác

định bởi $X(\omega, \cdot)(x) = X(\omega, x)$ là tập mờ. Với mỗi biến ngẫu nhiên mờ $X : \Omega \times \mathbf{E} \rightarrow [0, 1]$, tập α -mức liên kết với X được định nghĩa

$$X_\alpha(\omega) = [X(\omega, \cdot)]_\alpha$$

$$= \{x \in \mathbf{E} : X(\omega, x) \geq \alpha\},$$

trong đó $\omega \in \Omega$, $\alpha \in (0, 1]$. Ta còn định nghĩa

$$X_{\alpha^+}(\omega) = [X(\omega, \cdot)]_{\alpha^+}$$

$$= \text{cl}\{x \in \mathbf{E} : X(\omega, x) > \alpha\}$$

với $\omega \in \Omega$, $\alpha \in (0, 1]$. Khi đó, ánh xạ đa trị $X_\alpha : \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ là biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trong không gian $cc(\mathbf{E})$ với mỗi $\alpha \in (0, 1]$. Tương tự, ánh xạ đa trị $X_{\alpha^+} : \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ là biến ngẫu nhiên đa trị với mỗi $\alpha \in [0, 1)$. Giả sử xa hơn rằng, với mỗi $\omega \in \Omega$, $X_{0^+}(\omega)$ là tập con compact của $\mathbf{E}$ và ánh xạ $g = |X_{0^+}| \in L^1$. Khi đó biến ngẫu nhiên đa trị $X_\alpha : \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ nhận giá trị trong $ck(\mathbf{E})$ và bị chặn khả tích. Tương tự với mỗi $\alpha \in [0, 1)$, $X_{\alpha^+} : \Omega \rightrightarrows \mathbf{E}$ là biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trong $k(\mathbf{E})$. Với X, Y là các biến ngẫu nhiên mờ xác định trên $\Omega \times \mathbf{E}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$(X + Y)(\omega, x) = X(\omega, x) + Y(\omega, x)$$

$$(\lambda X)(\omega, x) = \lambda X(\omega, x).$$

Khi đó với mỗi $\alpha \in (0, 1]$, ta có

$$[X + Y]_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha, [\lambda X]_\alpha = \lambda X_\alpha.$$

Kỳ vọng mờ của biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập mờ $X : \Omega \times \mathbf{E} \rightarrow [0, 1]$ là một tập mờ $\tilde{E}X : \mathbf{E} \rightarrow [0, 1]$ sao cho $[\tilde{E}X]_\alpha = EX_\alpha$ với mọi $\alpha \in (0, 1]$.

2. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Định lý 2.1 [3, Hệ quả 5.6] Cho $\{X_n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc đôi một, cùng phân phối và bị chặn khả tích nhận giá trị trong $ck(E)$. Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, X_1 \right) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Áp dụng kết quả trên, chúng tôi thiết lập luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên mờ tương ứng với khoảng cách Hausdorff trong trường hợp cùng phân phối.

Định lý 2.2 Cho $\{X^n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ xác định trên $\Omega \times E$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) $X_{0+}^n(\omega)$ là tập con compact của E với mọi $\omega \in \Omega$ và với mọi $n \geq 1$;
- (ii) $g = \sup_{n \geq 1} |X_{0+}^n| \in L^1$;
- (iii) $\{X_\alpha^n : n \geq 1\}$ là dãy M -phụ thuộc đôi một và cùng phân phối với mỗi $\alpha \in (0, 1]$;
- (iv) $\{X_{\alpha+}^n : n \geq 1\}$ là dãy M -phụ thuộc đôi một và cùng phân phối với mỗi $\alpha \in [0, 1)$;
- (v) Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại phân hoạch $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = 1$ của $[0, 1]$ sao cho $\max_{1 \leq k \leq m} d_H(E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1), EX_{\alpha_k}^1) < \varepsilon$.

Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in (0, 1]} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_\alpha^i, EX_\alpha^1 \right) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Chứng minh. Giả sử $\varepsilon > 0$ tùy ý. Khi đó

bởi (v), tồn tại phân hoạch $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = 1$ [0, 1] sao cho

$$\max_{1 \leq k \leq m} d_H(E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1), EX_{\alpha_k}^1) < \varepsilon.$$

Với mỗi $\alpha \in (0, 1]$, tồn tại $k=1, \dots, m$ (phụ thuộc α) sao cho $\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_k}^i &\subset \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_\alpha^i \subset \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_{k-1}}^i, \\ EX_{\alpha_k}^1 &\subset EX_\alpha^1 \subset E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_\alpha^i, EX_\alpha^1 \right) &\leq d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_{k-1}}^i, EX_{\alpha_k}^1 \right) \\ &\quad + d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_k}^i, E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1) \right) \\ &\leq d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_k}^i, EX_{\alpha_k}^1 \right) \\ &\quad + d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_{k-1}}^i, E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1) \right) \\ &\quad + 2d_H(E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1), EX_{\alpha_k}^1) \\ &\leq d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_k}^i, EX_{\alpha_k}^1 \right) \\ &\quad + d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_{k-1}}^i, E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1) \right) \\ &\quad + 2d_H(E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1), EX_{\alpha_k}^1) \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq m} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_k}^i, EX_{\alpha_k}^1 \right) \\ &\quad + \max_{1 \leq k \leq m} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_{k-1}}^i, E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1) \right) \\ &\quad + 2 \max_{1 \leq k \leq m} d_H(E(\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^1), EX_{\alpha_k}^1) \\ &:= I + II + III. \end{aligned}$$

Với mỗi $k=1, \dots, m$, áp dụng Định lý 2.1 cho dãy các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_{\alpha_k}^n : n \geq 1\}$ nhận giá trị trong $ck(\mathbf{E})$ và bị chặn khả tích ta thu được giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_k}^i, EX_{\alpha_k}^1 \right) = 0 \text{ h.c.c}$$

khi $n \rightarrow \infty$ với mọi $k=1, \dots, m$. Vì vậy, $I \rightarrow 0$ h.c.c khi $n \rightarrow \infty$. Ngoài ra, với mỗi $k=1, \dots, m$, vì dãy các biến ngẫu nhiên đa trị $\{\overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^n : n \geq 1\}$ nhận giá trị trong $ck(\mathbf{E})$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.1 nên ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{co}X_{\alpha_{k-1}}^i, E(\overline{co}X_{\alpha_k}^1) \right) = 0$$

h.c.c khi $n \rightarrow \infty$. Do đó, từ [1, Bổ đề] ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha_{k-1}}^i, E(\overline{co}X_{\alpha_k}^1) \right) = 0$$

h.c.c khi $n \rightarrow \infty$. Vậy $II \rightarrow 0$ h.c.c khi $n \rightarrow \infty$. Với III, từ (v) ta suy ra $III < 2\varepsilon$ với mọi $n \geq 1$.

Kết hợp các lập luận ở trên ta thu được

$$d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha}^i, EX_{\alpha}^1 \right) \leq I + II + 2\varepsilon$$

với mọi $n \geq 1$. Vì I, II và ε không phụ thuộc vào α nên ta có bất đẳng thức

$$\sup_{\alpha \in (0,1]} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha}^i, EX_{\alpha}^1 \right) \leq I + II + 2\varepsilon$$

với mọi $n \geq 1$. Trong bất đẳng thức trên, cho $n \rightarrow \infty$ ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in (0,1]} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha}^i, EX_{\alpha}^1 \right) \leq 2\varepsilon \text{ h.c.c.}$$

Vì $\varepsilon > 0$ tùy ý nên ta suy ra ngay kết

luận của định lý. Định lý đã được chứng minh.

Trong trường hợp $\mathbf{E}$ là không gian Banach thực khả ly phản xạ, ta có định lý sau đây.

Định lý 2.3 Giả sử $\mathbf{E}$ là không gian Banach thực khả ly phản xạ và $\{X^n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ xác định trên $\Omega \times \mathbf{E}$ thỏa các điều kiện sau:

(i) $X_{0+}^n(\omega)$ là tập con compact của $\mathbf{E}$ với mọi $\omega \in \Omega$ và với mọi $n \geq 1$;

(ii) $g = \sup_{n \geq 1} |X_{0+}^n| \in L^1$;

(iii) $\{X_{\alpha}^n : n \geq 1\}$ là dãy M -phụ thuộc đôi một và cùng phân phối với mỗi $\alpha \in (0,1]$;

(iv) Ánh xạ $\alpha \mapsto X_{\alpha}^1$ liên tục trái vô hướng trên $(0,1]$.

Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 d_H \left(\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^i \right]_{\alpha}, [\tilde{E}X^1]_{\alpha} \right) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Chứng minh. Vì $\{X_{\alpha}^n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên đa trị M -phụ thuộc đôi một cùng phân phối nhận giá trị trong $ck(\mathbf{E})$, bị chặn khả tích với mỗi $\alpha \in (0,1]$ nên từ Định lý 2.1 ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha}^i, EX_{\alpha}^1 \right) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Ngoài ra vì

$$d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\alpha}^i, EX_{\alpha}^1 \right) \leq g + Eg$$

với mọi $n \geq 1$ và với mọi $\alpha \in (0,1]$ nên áp dụng định lý hội tụ bị chặn Lebesgue, ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_\alpha^i, EX_\alpha^1 \right) d\alpha = 0 \text{ h.c.c.}$$

Hơn nữa, vì $\mathbf{E}$ là không gian Banach thực khả ly phản xạ nên từ điều kiện (iv), áp dụng [1, Định lý 4.7], tồn tại duy nhất kỳ vọng mờ $\tilde{E}X^1$ sao cho $[\tilde{E}X^1]_\alpha = EX_\alpha^1$ với mỗi $\alpha \in (0,1]$. Do đó ta thu được luật mạnh số lớn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 d_H \left(\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^i \right]_\alpha, [\tilde{E}X^1]_\alpha \right) d\alpha = 0 \text{ h.c.c.}$$

Định lý đã được chứng minh.

3. KẾT LUẬN

Trên đây, chúng tôi đã thiết lập luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên mờ M -phụ thuộc đôi một cùng phân phối tương ứng với khoảng cách Hausdorff trong hai trường hợp $\mathbf{E}$ là không gian Banach thực khả ly (Định lý 2.2) hoặc không gian Banach thực khả ly phản xạ (Định lý 2.3). Các kết quả ở trên là mới, góp phần làm phong phú thêm cho hướng nghiên cứu về luật mạnh số lớn cho biến ngẫu nhiên mờ nói riêng và các định lý giới hạn trong xác suất nói chung.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Z. Artstein, J.C. Hansen (1985), Convexification in limit laws of random sets in Banach spaces, *The Annals of Probability*, 13, 307-309.
- [2] C. Castaing, C. Godet-Thobie, T. D. Hoang, P. Raynaud de Fitte (2015), On the integration of fuzzy level sets, in: *Advances in Mathematical Economics* (S. Kusuoka and T. Maruyama, eds.), 19, Springer, Tokyo, 1-32.
- [3] C. Castaing, H. T. Duyen, C. Hess (2020), Strong Laws of Large Numbers for pairwise M -dependent random sets under various convergences, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 21 (11), 2459-2497.
- [4] R. Feron (1976), Ensembles aléatoires flous, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Series A-B, 282 (16): Aiii, A903-A906.
- [5] H. Inoue (1991), A strong law of large numbers for fuzzy random sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 41, 285-291.
- [6] M. L. Puri, D. A. Ralescu (1986), Fuzzy random variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114 (2), 409-422.
- [7] H. Kwakernaak (1978), Fuzzy random variables - I. Definitions and theorems, *Information Sciences*, 15 (1), 1-29.
- [8] H. Kwakernaak (1979), Fuzzy random variables- II. Algorithms and examples for the discrete case, *Information Sciences*, 17 (3), 253-278.
- [9] E. P. Klement, M. L. Puri, D. A. Ralescu (1986), Limit theorems for fuzzy random variables, *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, 407, 171-182.
- [10] R. Kruse (1982), The strong law of large numbers for fuzzy random variables, *Information Sciences*, 28 (3), 233-241.
- [11] S. Li, Y. Ogura (2006), Strong laws of large numbers for independent fuzzy set-valued random variables, *Fuzzy Sets and Systems*, 157 (19), 2569-2578.
- [12] N. V. Quang, H. T. Duyen (2017), Convergence of weighted sums and

- strong law of large numbers for convex compact integrable random sets and fuzzy random sets, *Journal of Convex Analysis*, 24 (1), 213-238.
- [13] N. V. Quang, H. T. Duyen (2018), Complete convergence and strong law of large numbers for double arrays of convex compact integrable random sets and applications for random fuzzy variables, *Journal of Convex Analysis*, 25 (3), 841-860.
- [14] L. A. Zadeh (1965), Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

Liên hệ:

TS. Hoàng Thị Duyên

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Quảng Bình

Địa chỉ: 312 Lý Thường Kiệt, Đồng Hới, Quảng Bình

Email: duyenht@quangbinhuni.edu.vn

Ngày nhận bài: 18/06/2020

Ngày gửi phản biện: 23/06/2020

Ngày duyệt đăng: 12/10/2021