THE CONVEX PROPERTIES OF MEAN VALUES OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

TÍNH CHẤT LỒI CỦA CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH CỦA HÀM ĐIỀU HÒA DƯỚI

Nguyễn Song Phương Nghi[1], Thịnh Thị Trang[1], Nguyễn Thị Xuân Quỳnh[1], Phạm Văn Dược[2]
[1]Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng
[2]Trường Đại học Duy Tân

TÓM TẮT: *Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng các công cụ trong lý thuyết thế vị để chứng minh tính chất lồi và đưa ra một số đánh giá của các đại lượng trung bình của hàm điều hoà dưới.*

Từ khóa: *Hàm điều hoà dưới, đại lượng trung bình, hàm lồi.*

ABSTRACT: *In this note, we use some tools in the potential theory to prove some convex properties of mean values and to establish the relations between the mean values each other.*

Keywords: *Subharmonic functions, mean value, convex function.*

1. GIỚI THIỆU

Gần đây, trong các bài báo [1,2,3], các tác giả đã chứng minh một số tính chất lồi của các đại lượng trung bình rời rạc. Ngoài ra, việc sử dụng hàm lồi để chứng minh một số tính chất của các đại lượng trung bình với trọng rời rạc và đại lượng trung bình của các hàm khả tích cũng được đề cập trong các bài tập ở chương 1 trong [8].

Mục tiêu chính của bài báo này là sử dụng các cộng cụ trong lý thuyết thế vị để chứng minh tính chất lồi và đưa ra một số đánh giá về các đại lượng trung bình (xem Định nghĩa 2.7) của hàm điều hoà dưới (về lớp hàm điều hoà dưới có thể xem chi tiết thêm ở các tài liệu [4,5,6,7]).

Kết quả chính của bài báo là Định lý 2.2, 2.4, 2.5.

Sau đây, ta đưa ra một số khái niệm và kết quả chuẩn bị cho việc chứng minh các kết quả chính ở mục 2. Các nội dung ở mục này được tham khảo từ các tài liệu [4,5,6,7,8].

Định nghĩa 1.1. Cho X là một không gian tô pô. Hàm $u: X \to [-\infty, +\infty)$ được gọi là hàm nửa liên tục trên nếu tập $\{x \in X: u(x) < a\}$ là tập mở trong X với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2. Cho U là một tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u: U \to [-\infty, +\infty)$ được gọi là điều hoà dưới nếu nó là hàm nửa liên tục trên trên X và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương, tức là với mọi $\omega \in U$ tồn tại $\rho > 0$ sao cho

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\omega + re^{it}\right)dt, \quad (0 \leq r < \rho).$$

Các kết quả sau đây cho ta các điều kiện đủ về tính điều hoà dưới trên tập mở trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

Định lý 1.3. Cho T là một không gian tô pô compact và $U \subset \mathbb{C}$ là một tập mở. Cho hàm $v: U \times T \to [-\infty, +\infty)$ thoả mãn:
i) v là hàm nửa liên tục trên trên $U \times T$;
ii) Hàm $z \longmapsto v(z,t)$ điều hoà dưới trên U với mỗi $t \in T$.

Khi đó, hàm $u(z) = sup_{t\in T} v(z,t)$ là hàm điều hoà dưới trên U.

Chứng minh:

Xem Định lý 2.6.1 trong [7].

Định lý 1.4. Cho (Ω, μ) là một không gian đo với $\mu(\Omega) < +\infty$ và $U \subset \mathbb{C}$ là một tập mở. Cho hàm $v: U \times \Omega \to [-\infty, +\infty)$ thoả mãn:

i) v là hàm nửa liên tục trên trên $U \times \Omega$;

ii) Hàm $z \longmapsto v(z,\omega)$ điều hoà dưới trên U với mỗi $\omega \in \Omega$;

iii) Hàm $z \longmapsto sup_{\omega\in\Omega} v(z,\omega)$ bị chặn trên địa phương trên U.

Khi đó, hàm $u(z) = \int_\Omega v(z,\omega) d\mu(\omega)$ là hàm điều hoà dưới trên U.

Chứng minh:

Xem Định lý 2.6.5 trong [7].

Định nghĩa 1.5. Một hàm thực $f(x)$ được gọi là lồi theo $logx$ nếu hàm $f(e^x)$ là hàm lồi theo x.

Nhận xét 1.6. Giả sử $f(x)$ là một hàm lồi theo logx. Đặt $g(x) = f(e^x)$. Khi đó, $g(x)$ là hàm lồi và $g(logx) = f(x)$.

Đặt $x = x_1^{1-a} x_2^a$ với mọi $0 \le a \le 1$. Suy ra

$$logx = (1-a)logx_1 + alogx_2.$$

Do $g(x)$ là hàm lồi nên ta có

$$g(logx) \le (1-a)g(logx_1) + ag(logx_2).$$

Hay

$$f(x) \le (1-a)f(x_1) + af(x_2)$$
$$\Leftrightarrow f(x_1^{1-a}x_2^a) \le (1-a)f(x_1) + af(x_2) \quad (\forall a \in [0,1]).$$

Định nghĩa 1.7. Cho u là một hàm điều hoà dưới trên đĩa $\Delta(0,\rho)$ và $u \not\equiv -\infty$. Với mỗi số $0 < r < \rho$ ta định nghĩa một số đại lượng trung bình sau đây:

$$M_u(r) = sup_{|z|=r} u(z),$$

$$C_u(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{it}\right)dt,$$

$$B_u(r) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\Delta(0,r)} udA,$$

ở đó, dA là độ đo Lebesgue trên mặt phẳng phức $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$.

Sau đây, ta sẽ thiết lập mối liên hệ giữa $C_u(r)$ và $B_u(r)$. Với $0 < s < r < \rho$, ta có

$$C_u(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(se^{it}\right)dt.$$

Nhân 2 vế của đẳng thức trên với $2\pi s$, rồi lấy tích phân theo s từ $s = 0$ đến $s = r$ ta được

$$2\pi s C_u(s) = s\int_0^{2\pi} u\left(se^{it}\right)dt$$

$$\Rightarrow 2\pi\int_0^r sC_u(s)ds = \int_0^r\int_0^{2\pi} su\left(se^{it}\right)dtds = \pi r^2 B_u(r).$$

Vậy ta có

$$B_u(r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r sC_u(s)ds. \qquad (1)$$

Định nghĩa 1.8. Hàm $v: \Delta(0,\rho) \to [-\infty, +\infty]$ được gọi là hàm bán kính nếu nó thoả mãn $v(z) = v(|z|), \forall z \in \Delta(0,\rho)$.

2. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Bổ đề 2.1. Cho $v: \Delta(0,\rho) \to [-\infty, +\infty)$ là hàm bán kính sao cho $v \not\equiv -\infty$. Khi đó, hàm v là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$ nếu và chỉ nếu $v(r)$ là hàm lồi tăng theo $logr$ với mọi $0 < r < \rho$ và $lim_{r\to 0} v(r) = v(0)$.

Chứng minh:

- Giả sử hàm $v(r)$ là lồi tăng theo $logr$: Ta có hàm $u(z) = \log|z|$ là điều hoà trên $\Delta(0,\rho)$ và hàm $\varphi(t) = v(e^t)$ là lồi tăng nên áp dụng Định lý 3.2.18 trong [6] ta suy ra hàm $\varphi \circ u$ là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$. Và ta có thể kiểm tra rằng $v = \varphi \circ u$ trên $\Delta(0,\rho)$. Vậy v là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$.

- Giả sử v là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$:

+ Ta chứng minh hàm $v(r)$ là tăng trên

$[0,\rho)$. Thật vậy, lấy $0 \le r_1 \le r_2 < \rho$. Áp dụng nguyên lý cực đại của hàm điều hoà dưới (Định lý 3.15 trong [4]) cho hàm v trên $\Delta(0,r_2)$ ta có

$$v(r_1) \le sup_{\partial\Delta(0,r_2)} v = v(r_2).$$

+ Ta chứng minh hàm v thoả mãn $lim_{r\to 0} v(r) = v(0)$: Thật vậy, do v là hàm tăng trên $[0,\rho)$ nên ta có

$$liminf_{r\to 0} v(r) \ge v(0).$$

Mặt khác, bởi tính nửa liên tục trên của hàm v ta suy ra

$$liminf_{r\to 0} v(r) \le v(0).$$

Vậy, ta có $liminf_{r\to 0} v(r) = v(0)$.

+ Ta chứng minh hàm v là hàm lồi theo $logr$: Trước hết, theo tính khả tích địa phương của hàm điều hoà dưới (Mệnh đề 1.13 trong [5]) ta có $v(r) > -\infty$ với mọi $r > 0$. Lấy $r_1, r_2 \in (0,\rho)$ với $r_1 < r_2$. Chọn các hằng số a, b sao cho:

$$a + blogr_1 = v(r_1) \text{ và } a + blogr_2 = v(r_2).$$

Ta có hàm $v(z) - a - blog|z|$ là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$. Áp dụng nguyên lý cực đại của hàm điều hoà dưới cho hàm đó trên miền $\{z: r_1 < |z| < r_2\}$ ta có

$$v(z) - a - blog|z| \le sup_{|z|=r_1 \text{hoặc } |z|=r_2}[v(z) - a - blog|z|].$$

Do v là hàm bán kính nên từ đây ta suy ra

$$v(r) \le a + blogr \quad (r_1 < r < r_2).$$

Đặt $logr = (1-c)logr_1 + clogr_2$ với mọi $0 \le c \le 1$. Ta có

$$v(r) \le a + blogr = (1-c)(a + blogr_1) + c(a + blogr_2) = (1-c)v(r_1) + cv(r_2).$$

Vậy, $v(r)$ là hàm lồi theo $logr$.

Vậy, Bổ đề 2.1 được chứng minh.

Dựa vào Bổ đề 2.1 ta chứng minh một số tính chất của các đại lượng trung bình của hàm điều hoà dưới sau đây.

Định lý 2.2. Cho u là một hàm điều hoà dưới trên đĩa $\Delta(0,\rho)$ sao cho $u \not\equiv -\infty$. Với mỗi $0 < r < \rho$, ta có các kết quả sau đây về các đại lượng giá trị trung bình:

i) $M_u(r), C_u(r), B_u(r)$ là các hàm tăng và lồi theo $logr$;

ii) $M_u(r) \ge C_u(r) \ge B_u(r) \ge u(0)$ với mọi $0 < r < \rho$;

iii) $lim_{r\to 0} M_u(r) = lim_{r\to 0} C_u(r) = lim_{r\to 0} B_u(r) = u(0)$.

Chứng minh:

i) Với $0 < r < \rho$ ta có:

$$M_u(r) = v(r) \quad với \quad v(z) = sup_{t\in[0,2\pi]} u(ze^{it}), \qquad (2)$$

$$C_u(r) = v(r) \quad với \quad v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(ze^{it})dt, \qquad (3)$$

$$B_u(r) = v(r) \quad với \quad v(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 u(zse^{it})sdsdt. \qquad (4)$$

Áp dụng Định lý 1.3 cho hàm $v(z,t) = u(ze^{it})$ trên $(z,t) \in \Delta(0,\rho) \times [0,2\pi]$ ta suy ra $M_u(r)$ là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$. Áp dụng Định lý 1.4 cho hàm $v(ze^{it})$ trên $(z,t) \in \Delta(0,\rho) \times [0,2\pi]$ ta suy ra $C_u(r)$ là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$. Áp dụng Định lý 1.4 cho hàm $v(z,t) = \int_0^1 u(zse^{it})sds$ trên $(z,t) \in \Delta(0,\rho) \times [0,2\pi]$ ta suy ra $B_u(r)$ là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$.

Mặt khác, ta có thể kiểm tra rằng các hàm v xác định trong các công thức $(2),(3),(4)$ là hàm bán kính, tức là $v(z) = v(|z|)$ với mọi $z \in \Delta(0,\rho)$. Vậy áp dụng Bổ đề 2.1 ta suy ra các hàm $M_u(r), C_u(r), B_u(r)$ là các hàm lồi tăng theo $logr$.

ii) Với mọi $0 < r < \rho$ ta có

$$C_u(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})dt \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sup_{|z|=r} u(z)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_u(r)dt$$
$$= M_u(r).$$

Với mọi $0 < s < r < \rho$, theo i) ta có

$$C_u(r) \geq C_u(s) \geq lim_{s\to 0} v(s) = v(0) = u(0).$$

Nhân các vế của dãy bất đẳng thức ở trên với $\frac{2s}{r^2}$, rồi lấy tích phân theo s từ $s = 0$ tới $s = r$ ta nhận được

$$C_u(r) \geq \frac{2}{r^2}\int_0^{2\pi} C_u(s)sds \geq u(0).$$

Hay tương đương với $C_u(r) \geq B_u(r) \geq u(0)$. Vậy, ii) được chứng minh.

iii) Từ kết quả của ii), để chứng minh iii) ta chỉ cần chỉ ra

$$limsup_{r\to 0} M_u(r) \leq u(0).$$

Và điều này là hiển nhiên vì hàm u là hàm nửa liên tục trên trên $\Delta(0,\rho)$.

Vậy Định lý 2.2 được chứng minh.

Bổ đề 2.3. Cho $u: U \to [0,+\infty)$ là một hàm trên tập mở U trong $\mathbb{C}$. Khi đó, hàm $logu$ là hàm điều hoà dưới trên U nếu và chỉ nếu hàm $u|e^q|$ là hàm điều hoà dưới trên U, với mọi đa thức một biến phức q.

Chứng minh:

- Giả sử hàm $logu$ là điều hoà dưới trên U: Khi đó, với mọi đa thức q, ta có hàm $logu + Req$ là hàm điều hoà dưới trên U. Áp dụng Định lý 1.1.30 trong [5] ta suy ra hàm sau

$$e^{logu+Req} = ue^{Req} = u|e^q|$$

Cũng là hàm điều hoà dưới trên U.

- Giả sử hàm $u|e^q|$ là điều hoà dưới trên U với mọi đa thức một biến phức q: Khi đó, chọn $q = 0$ ta suy ra hàm là hàm điều hoà dưới trên U và đặc biệt u là hàm nửa liên tục trên. Suy ra, hàm $logu$ cũng là hàm nửa liên tục trên. Để chứng minh $logu$ là hàm điều hoà dưới ta chỉ cần chỉ ra nó thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương. Thật vậy, lấy $\Delta = \Delta(w,\rho)$ sao cho $\bar{\Delta} \subset U$. Theo Mệnh đề 2.3.3 trong [7], tồn tại dãy hàm liên tục $f_n: \partial\Delta \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f_n \downarrow logu \quad trên\ \partial\Delta \quad khi\ n \to +\infty.$$

Theo Định lý Stone – Weierstrass, với mỗi $n \geq 1$ tồn tại đa thức phức q_n sao cho

$$0 \leq Req_n - f_n \leq \frac{1}{n} \quad trên\ \partial\Delta.$$

Từ đây suy ra

$$limsup_{z\to\delta} u(z)\left|e^{-q_n(z)}\right| \leq e^{f_n(\delta)}e^{-Req_n(\delta)} \leq 1 \quad (\forall\delta \in \partial\Delta).$$

Do hàm $u|e^{-q_n}|$ là điều hoà dưới, nên áp dụng nguyên lý cực đại (Định lý 3.15 trong [4]) ta suy ra $u|e^{-q_n}| \leq 1$ trên Δ. Từ đây ta suy ra

$$logu(w) \leq Req_n(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Req_n\left(w + \rho e^{it}\right)dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n\left(w + \rho e^{it}\right)dt + \frac{1}{n}.$$

Cho $n \to +\infty$ và áp dụng Định lý hội tụ đơn điệu ta có

$$logu(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} logu\left(w + \rho e^{it}\right)dt.$$

Vậy $logu$ là hàm điều hoà dưới trên U.

Vậy Bổ đề 2.3 được chứng minh.

Định lý 2.4. Nếu hàm $logu$ là hàm điều hoà dưới trên đĩa $\Delta(0,\rho)$ thì các hàm $logM_u(r), logC_u(r), logB_u(r)$ là hàm lồi theo $logr$.

Chứng minh:

a) Ta chứng minh hàm $logM_u(r)$ là lồi theo $logr$: Do hàm $logx$ là hàm tăng nên ta có thể kiểm tra đẳng thức sau là đúng

$$logM_u(r) = M_{logu}(r) \quad (0 < r < \rho).$$

Do hàm $logu$ là hàm điều hoà dưới nên theo Định lý 2.2 ta có hàm $M_{logu}(r)$ là lồi theo $logr$. Vậy $logM_u(r)$ là lồi theo $logr$.

b) Ta chứng minh hàm $logC_u(r)$ là lồi theo $logr$: Theo công thức (3) ta có:

$$logC_u(r) = log\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})dt\right) = v(r),$$

ở đó

$$v(z) = log\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(ze^{it})dt\right).$$

Ta sẽ chứng minh v là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$. Thật vậy, lấy đa thức một biến phức bất kỳ q, ta sẽ chứng minh $|e^{q(z)}|e^{v(z)}$ là hàm điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$. Ta có

$$\left|e^{q(z)}\right|e^{v(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{q(z)}\right|u(ze^{it})dt.$$

Vì hàm $logu$ là điều hoà dưới nên theo Bổ đề 2.3 hàm $|e^{q(z)}|u(ze^{it})$ cũng là điều hoà dưới với mọi $t \in [0,2\pi]$. Từ đó, suy ra hàm

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{q(z)}\right|u(ze^{it})dt$$

cũng là hàm điều hoà dưới. Vậy, hàm $\left|e^{q(z)}\right|e^{v(z)}$ là điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$. Theo Bổ đề 2.3, suy ra hàm $loge^{v(z)} = v(z)$ là điều hoà dưới trên $\Delta(0,\rho)$.

Mặt khác, từ định nghĩa của hàm v ta có thể kiểm tra rằng v là hàm bán kính. Từ đây, áp dụng Bổ đề 2.1 ta suy ra $v(r)$ là hàm lồi theo $logr$ hay $logC_u(r)$ là hàm lồi theo $logr$.

c) Ta chứng minh hàm $logB_u(r)$ là lồi theo $logr$: Theo công thức (4) ta có

$$logB_u(r) = log\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} u(rse^{it})sdsdt\right) = v(r),$$

với

$$v(z) = log\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} u(zse^{it})sdsdt\right).$$

Bằng cách lập luận tương tự như trường hợp b) ta suy hàm $logB_u(r)$ là lồi theo $logr$.

Vậy, Định lý 2.4 được chứng minh.

Định lý 2.5. Cho u là một hàm điều hoà dưới trên đĩa $\Delta(0,\rho)$ sao cho $u \not\equiv -\infty$. Khi đó ta có

$$B_u(r) \geq C_u\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right), \qquad (0 < r < \rho).$$

Chứng minh:

Theo công thức (1) ta có

$$B_u(r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r C_u(s)sds.$$

Theo Định lý 2.2, hàm $C_u(s)$ là lồi theo $logs$. Đặt $C_u(s) = \varphi(logs)$. Khi đó, ta có φ là hàm lồi. Áp dụng Bất đẳng thức Jensen (Định lý 1.7.3 trong [8]) ta có:

$$B_u(r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r \varphi(logs)d\left(\frac{s^2}{2}\right) = \int_0^r \varphi(logs)d\left(\frac{s^2}{r^2}\right) \geq \varphi\left(\int_0^r logsd\left(\frac{s^2}{r^2}\right)\right) = \varphi\left(\int_0^r \frac{1}{r^2}2slogsds\right)$$

$$= \varphi\left(logr - \frac{1}{2}\right) = C_u\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right).$$

Vậy, Định lý 2.5 được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] József Sándor. (2015), A note on log-convexity of power means, Annales Math. Et Informaticae, 45, pp. 107-110.

[2] Thomas J.Mildorf. (2006), A sharp bound on the two variable power, Mathematical Reflections, 2, pp. 1-5.

[3] Ladislav Matejicka. (2015), Short mote on convexity of power mean, Tamkang Journal of Mathematics, 46(4), pp. 423-426.

[4] D. H. Armitage, S. J. Gardiner. (2001), *Classical Potential Theory*, Springer-Verlag London Ltd.

[5] Pham Hoang Hiep. (2016), *Singularities*

of Plurisubharmonic Functions, Pub. Hou. For Sci. and Tec.

[6] L. Hormander. (1994), *Notions of Convexity*, Progress in Mathematics 127, Birkhauser, Boston.

[7] M. Klimex. (1991), *Pluripotential theory*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

[8] C. P. Niculescu, Lars-Erik Persson. (2018), *Convex Functions and Their Applications*, CMS Books in Math.

Liên hệ:
Nguyễn Song Phương Nghi
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.
Địa chỉ: 459 Tôn Đức Thắng, Hoà Khánh Nam, Liên Chiểu, Đà Nẵng
Email: nguyensongphuongnghi@gmail.com

Ngày nhận bài: 29/3/2024
Ngày gửi phản biện: 30/4/2024
Ngày duyệt đăng: 20/5/2024